

Die

Planimeter

von

Ernst, Wetli und Hansen,

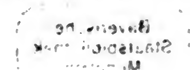
welche

den Flächeninhalt ebener Figuren durch das Umfahren des Umfangs angeben.

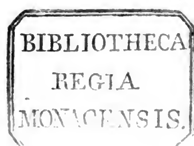
Von

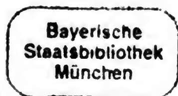
Prof. Dr. C. M. Bauernfeind.

Mit einer Tafel Abbildungen.



München, 1853.
Joh. Palm's Hofbuchhandlung.





Vorrede.

Die vorliegende Abhandlung, welche als besonderer Abdruck aus der Zeitschrift des polytechnischen Vereins für Bayern vor ein größeres Publikum tritt, bedarf in so ferne eines kurzen Vorworts, als sie dadurch in einigen Punkten ergänzt und berichtigt wird.

Zuvörderst habe ich zu bemerken, daß ich die von Gotha ausgehenden verbesserten Wetli'schen Planimeter anfangs nach dem Verfertiger dieser vervollkommneten Instrumente, Herrn Mechanikus Ausfeld, benannte, während ich später auf die Nachricht hin, daß alle Verbesserungen von Herrn Hofrath Hansen allein herrühren, die Bezeichnung änderte. In dem ersten Bogen, der bereits gedruckt war als ich genauer unterrichtet wurde, konnte jedoch diese Aenderung nicht mehr vorgenommen werden, weßhalb ich jetzt den freundlichen Leser bitten muß, auf der ersten, sechsten und vierzehnten Seite „Hansen" für „Ausfeld" zu setzen.

Ferner finde ich mich veranlaßt, über einige in den Jahrgängen 1841 und 1842 des Bulletin de la Société d'Encouragement etc. enthaltene, die Geschichte des Planimeters betreffende Notizen, welche ich vor Kurzem auffand, zu referiren. Nach diesen verdankt man die erste Idee zu dem Ernst'schen Planimeter einem Herrn Opikofer, Ingenieur in der Schweiz. Derselbe hat bereits im Jahre 1827 einen Pla-

nimeter nach seiner Erfindung hergestellt, ihn aber, da er unvollkommen war, nicht bekannt gemacht. Seine merkwürdige Erfindung wurde erst zehn Jahre später von dem Mechaniker Herrn Ernst, welcher sie wesentlich verbesserte, in's Leben eingeführt. Die Akademie der Wissenschaften in Paris belohnte den letzteren für seine Verbesserung und vortreffliche Ausführung des Planimeters im Jahre 1836 mit einem Theil des bei ihr gestifteten Montyon'schen Preises für ausgezeichnete Leistungen in dem Gebiete der Mechanik. Solche Aufmunterungen werden den Mechanikern in Deutschland selten zu Theil; selbst die wohlfeileren der werkthätigen Anerkennung ihrer Arbeiten entgehen ihnen oft, indem man vom Auslande bezieht, was im eigenen Vaterlande besser zu haben ist. Möge es mit den Planimetern nicht eben so der Fall seyn; denn die Ausführung derselben durch Herrn Ausfeld ist vorzüglich, wie sich auch ohne diese Versicherung aus den auf S. 33 bis 41 angeführten Versuchsresultaten ergiebt.

Schließlich fühle ich mich verpflichtet, dem Herrn Hofrath Hansen für mehrere gütige Mittheilungen, welche dieser Abhandlung einverleibt sind und wodurch sie sehr gewonnen hat, hiermit öffentlich zu danken, und diejenigen Leser, welche vielleicht vor einigen höheren Rechnungsformen, die ich anwendete, zurückschrecken sollten, auf den Anhang aufmerksam zu machen, welcher eine von dem genannten großen Mathematiker und Astronomen herrührende elementare Theorie des Planimeters enthält.

München, 17. Mai 1853.

Carl Bauernfeind.

Es gab wohl zu keiner Zeit so viele Flächeninhalte ebener Figuren zu berechnen als jetzt, wo man sich mit den ausführlichsten Landesvermessungen und den belangreichsten Strassenbauten beschäftigt. Ueberschlägt man nach den Angaben einiger Schriftsteller und Ingenieure die für die Steuerkataster, die Grunderwerbungen und Erdberechnungen für Eisenbahnen 2c. nöthigen Flächenbestimmungen, so erreicht die Zahl der in Europa bloß für diese Zwecke jährlich auszumessenden Figuren nahehin die Größe einer Billion. Wenn aber Jahr für Jahr eine und dieselbe ermüdende und geisttödtende Arbeit tausend Millionen Male verrichtet werden muß, so ist es begreiflich, daß man daran denkt, sie abzukürzen oder durch ein mechanisches Verfahren zu ersetzen. Und in der That waren die letzten Jahrzehnte reich an Erfindungen theils von Hilfsmitteln zur Berechnung, theils von Vorrichtungen zur mechanischen Bestimmung des Flächeninhalts ebener Figuren.

Für diese Vorrichtungen, welche den Namen Planimeter erhalten haben, nehme ich die Aufmerksamkeit des geneigten Lesers auf kurze Zeit in Anspruch, um ihm für's Erste einen Ueberblick der verschiedenen Bestrebungen, einen zweckmäßigen Planimeter zu finden, zu verschaffen und hierauf zu zeigen, wie diese Bestrebungen in der neuesten Zeit mit dem vollständigsten Erfolge gekrönt wurden, und wie vielfacher Anwendungen die Planimeter von Wetli in Zürich und Ausfeld in Gotha fähig sind. Nebenbei ist es meine Absicht, das Verdienst des deutschen Mechanikers Ernst in Paris um die Erfindung der Planimeter nachzuweisen, da desselben in der Abhandlung des Hrn. Prof. Stampfer in Wien „über das neue Planimeter des Ingenieurs Wetli", welche

aus den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien in die Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins (1850, Nr. 7) und von hier in Dingler's polytechnisches Journal (Bd. 116) überging, gar nicht erwähnt ist und angenommen wird, Wetli sei der Erfinder eines Instruments, das er doch nur wesentlich verbessert hat.

1. Die verschiedenen Arten der Planimeter.

Der einfachste Planimeter besteht aus einem Netze von kleinen Quadraten, das auf einer dünnen und durchsichtigen Platte von Glas oder Horn genau verzeichnet ist und womit man die auszumessende Fläche überdeckt. Das Produkt aus der Anzahl der von dem Umfange dieser Fläche eingeschlossenen Quadrate in den Inhalt eines solchen Quadrats gibt den Flächenraum der Figur. Je nach dem Maßstabe, in welchem die Figur aufgetragen ist, wird der Inhalt der das Netz bildenden Einzelquadrate ein anderer und dieser Inhalt muß für jeden Maßstab besonders bestimmt werden. Betragen z. B. die Seiten der Quadrate 1 Millimeter, so wird eine Fläche in natürlicher Größe so viele Quadrat-Milimeter fassen als sie Quadrate deckt; ist sie aber im Maße von 1 : 1000 aufgetragen, so stellt jedes Quadrat einen Quadratmeter vor. Die durch diese Einrichtung zu bewirkende Flächenmessung kann keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, weßhalb man auch die sie bildenden Vierecke nur „Schätzquadrate“ nennt.

Zusammengesetzter als der vorhergehende, aber auch auf das Princip der Schätzung gegründet, ist der Planimeter von Oldendorp, welcher folgende Einrichtung hat. Ein quadratischer Rahmen von Messing enthält in kleinen aber gleichen Abständen ausgespannte Seidenfäden, welche zweien Seiten des Quadrats parallel laufen. Legt man diesen Rahmen auf eine auszumessende Figur, so schneiden die Fäden lauter Parallelogramme und Paralleltrapeze von gleicher Breite ab. Ihr Inhalt ist also den Grundlinien proportional. Man braucht somit nur diese zu messen und zu addiren, um die Fläche zu erhalten. Dazu dient ein besonderer

Zirkel, welcher jedesmal, wenn er um eine bestimmte Weite geöffnet ist, durch Einspringen einer Feder oder auf andere Weise ein Zeichen gibt. Beträgt z. B. der Abstand der Fäden für einen bestimmten Maßstab 4 Ruthen und wünscht man, daß der Zirkel Tagwerke von 400 Quadratruthen anzeige, so muß derselbe so eingerichtet werden, daß er bei einer Oeffnung von 100 Ruthen das Zeichen gibt.

Die eben betrachteten Planimeter zerlegen die Fläche entweder in Quadrate oder in sehr schmale Parallelogramme. Es fehlt auch nicht an Vorrichtungen, welche die auszumessende Figur in schmale concentrische Ringstücke zerlegen und deren Fläche mechanisch bestimmen. Von dieser Art ist der Planimeter von Westfeld, welcher in einer bei Dietrich in Göttingen im Jahre 1826 erschienenen Broschüre unter dem Titel „Ringmesser" von dem Erfinder beschrieben wurde. Das Instrument ist ein Zirkel, dessen Oeffnung mit Hilfe eines an einem Schenkel befestigten und durch den anderen Schenkel reichenden gezahnten Bogens durch einen Druck auf den letztern nach und nach um eine bestimmte Einheit kleiner gemacht werden kann, und welcher durch zwei an dem Ende des ersten Schenkels angebrachte Rädchen die Längen der mit den immer kürzer gewordenen Halbmessern beschriebenen Ringstücke mißt. Es ist nicht bekannt geworden, daß dieser Ringmesser irgend einen Erfolg gehabt habe. Der Erfinder gibt die Genauigkeit des Instruments selbst nur auf $\frac{1}{300}$ an, und es ist wahrscheinlich, daß sie bei kleinen und sehr unregelmäßigen Figuren noch viel geringer ist.

Mehrere Planimeter sind so eingerichtet, daß sie die zur Berechnung eines Drei- oder Vierecks nöthigen Factoren, also Grundlinie und Höhe, auf mechanischem Wege geben, während die Multiplikation derselben auf gewöhnliche Weise oder mit Hilfe von besonderen Tafeln, welche die Produkte irgend zweier Zahlen enthalten, vorgenommen wird. Das Aufsuchen der Grundlinie und Höhe oder ihrer Hälfte durch den Planimeter erfordert fast eben so viel Zeit, als wenn es mit Zirkel und Maßstab geschähe; es ist folglich durch diese Gattung von Apparaten nur wenig ge-

wonnen. Wir wollen sie daher auch nicht weiter beschreiben, sondern diejenigen Leser, welche näheren Aufschluß darüber wünschen, auf die Broschüre: „der Universal-Planimeter von Harkot", Köln 1824, und auf Lemoch's „Lehrbuch der praktischen Geometrie" verweisen, welches im 2. Bande auf S. 58 bis 65 den „Berechnungsapparat" von Posener, welcher bei der k. k. österreichischen Katastervermessung im Gebrauche ist, und auf S. 66 bis 69 den gleichnamigen Apparat von Alder, der ebendaselbst Anwendung findet, sehr ausführlich beschreibt.

Die meisten Planimeter beruhen darauf, daß sie den Flächeninhalt eines Dreiecks durch das Maß einer zur Grundlinie des Dreiecks senkrecht stehenden Linie angeben, welche das Instrument selbst beschreibt. Ich werde diese Gattung von Flächenmessern an zwei Beispielen erläutern. Ist abc (Fig. 1) irgend ein ebenes Dreieck, cd die Verlängerung von ac, und errichtet man in b und c Senkrechte auf ab, so entstehen die beiden ähnlichen Dreiecke ace und adb, in welchen sich $ae : ec = ab : bd$ verhält, woraus $ae \,.\, bd = ab \,.\, ec$ folgt. Da aber $ab \,.\, ec$ gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks abc, so ist der einfache Inhalt dieses Dreiecks auch $= \frac{1}{2}\, ae \,.\, bd$; und dieses Produkt stellt die Fläche aller Dreiecke von der Grundlinie ab und der Höhe ce vor. Es ist somit der Punkt e, in welchem man die Höhe sich aufgetragen denkt, auf der Linie ab ganz beliebig zu wählen. Man kann ihm deßhalb auch ein für allemal einen bestimmten unveränderlichen Abstand von a anweisen und dadurch den Faktor $\frac{1}{2} ae$ constant machen. Ist aber dieser Faktor unveränderlich, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks abc der Senkrechten bd proportional, und es wird diese Senkrechte die Dreiecksfläche geben, wenn man sie mit einem Maßstabe mißt, welcher sich zu dem der Figur wie $\frac{1}{2} ae$ zu 1 verhält. Auf dieser Betrachtung beruht der Planimeter des Prof. G. Wagner, welcher von dem Erfinder im Jahre 1821 in einer bei Jäger in Frankfurt a/M. erschienenen Abhandlung „über den Gebrauch und die Einrichtung des vor kurzem erfundenen Planimeters" abgebildet und beschrieben wurde, und von dem nur noch anzuführen

ist, daß das Instrument sich an die Grundlinie des auszumessenden Dreiecks mit einem scharf bezeichneten Punkte a anschließt, in der Entfernung ae die Höhe des Dreiecks aufträgt, über den Endpunkt c der Höhe von a aus eine Diagonale legt und einen in oben angegebener Weise getheilten Maßstab enthält, der sich senkrecht zur Grundlinie bis an deren Endpunkt b fortbewegen läßt, woselbst er die Länge bd und somit auch die Fläche des Dreiecks anzeigt.

Eine der vorigen ähnliche Betrachtung liegt der Einrichtung des Planimeters von Prof. G. G. Schmidt zu Grunde, wie aus der Zugabe zu dessen „Anfangsgründen der Mathematik" Th. 1 hervorgeht. Bezeichnet nämlich b die Grundlinie und h die Höhe irgend eines Dreiecks, so ist dessen Inhalt $= \frac{1}{2}\, bh$, und haben b' und h' für ein zweites, dem ersten gleiches Dreieck dieselbe Bedeutung, so ist $\frac{1}{2} b'h' = \frac{1}{2}\, bh$, woraus

$$h' = \frac{bh}{b'}$$

folgt. Macht man $b' =$ der doppelten Längeneinheit, durch welche b, h, h' gemessen werden, so wird

$$h' = \tfrac{1}{2}\, bh$$

d. h. die Senkrechte h' dem Inhalt des Dreiecks von der Grundlinie b und der Höhe h gleich. Um die Höhe h' zu messen, denke man sich einen Winkel asm (Fig. 2) in seinem Scheitel s beweglich und auf einem Schenkel die Größe $b' = se = 2$ aufgetragen. Diesen Winkel lege man an die Grundlinie ac des zu messenden Dreiecks acd so, daß der Endpunkt e der Länge b' mit dem Fußpunkt e der von der Spitze d ausgehenden Höhe de zusammenfällt und drehe hierauf den beweglichen Schenkel sm, bis er die Spitze d des Dreiecks berührt. Nun schiebe man den Scheitel des festgestellten Winkels asm von s nach c, so wird cf der sm parallel und af stellt die Größe h' und folglich auch den Inhalt des Dreiecks acd dar. Denn es sind nach diesem Aufbau der Figur die Dreiecke acf und esd ähnlich, und es verhält sich folglich

$$af : ac = de : es$$

oder $af : b = h : 2$

woraus $af = \frac{1}{2} bh = h'$

folgt, was zu beweisen war. Hieraus ergibt sich, daß das Instrument nur aus einem beweglichen Winkelhaken und einem auf dem Schenkel se senkrecht verschiebbaren und entsprechend getheilten Maßstabe zu bestehen braucht, um die Größe h' bestimmen zu können.

Ein sinnreich zusammengesetzter, zur Gattung der vorhergehenden gehöriger Planimeter ist der von Franz Horsky, welcher im Jahre 1840 in einer besonderen Abhandlung und 1850 in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins beschrieben wurde. Dieser Apparat gibt, wie jene von Wagner und Schmidt, nur die Flächeninhalte von Drei- und Vierecken, und es wird das Verfahren zur Bestimmung dieser Inhalte oft sehr zeitraubend und mühsam, namentlich dann, wenn die auszumessende Figur eine gewisse Größe überschreitet oder die ihre Fläche bestimmenden Faktoren in keinem für das Instrument geeigneten Verhältnisse stehen. Aus diesem Grunde hat auch dieser Planimeter nur wenig Anwendung gefunden. Wir übergehen ihn daher unter Hinweisung auf dessen Abbildung und Beschreibung in der genannten Zeitschrift, S. 57 bis 60.

Nunmehr sind wir bei der Klasse von Planimetern angekommen, welche den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlung ausmachen, nämlich bei jenen, welche den Inhalt einer gezeichneten ebenen Figur von ganz beliebiger Gestalt durch bloßes Umfahren ihres Umfangs sofort angeben, und welche demnach das $\int y\,dx$ in allen Fällen mechanisch darstellen. Die Erfindung dieser Art von Flächenmessern ist um so überraschender, als die Fläche einer Figur bekanntlich in gar keinem mathematischen Zusammenhange mit der Größe der Umfangslinie steht, und sie erscheint um so wichtiger, je mehr die durch sie gebotene mechanische Flächenbestimmung die gewöhnliche Berechnungsweise an Sicherheit, Genauigkeit und Schnelligkeit übertrifft. Hieher gehören die Planimeter von Ernst, Sang, Wetli und Ausfeld, welche alle auf einerlei Princip beruhen

und nur in der Ausführung mehr oder weniger verschieden sind, wie die folgende Darstellung genügend beweisen wird.

Den Planimeter von Sang, welcher im 122. Bande des Dinglerschen polytechnischen Journals abgebildet und beschrieben ist, schließe ich übrigens von dieser Darstellung aus, weil er sich von dem 10 Jahre älteren Ernst'schen Planimeter fast gar nicht unterscheidet.

2. Die Planimeter von Ernst und Wetli.

Eine Abbildung und Beschreibung des Ernst'schen Planimeters befindet sich in Dinglers polytechnischem Journal, Jahrgang 1842, Bd. 86, S. 33; die Theorie desselben ist jedoch weder dort noch anderswo erörtert. Da aber gerade aus ihr die völlige Uebereinstimmung der folgenden Planimeter mit dem in Rede stehenden hervorgeht, so theile ich eine von mir entworfene mit, nachdem ich das Wesen des Apparats mit Hilfe der Figuren 3 und 4 erklärt habe, die gewissermassen nur das Gerippe der an dem genannten Orte zu findenden vollständigen Zeichnung bilden.

Der Hauptbestandtheil des Planimeters von Ernst ist ein drehbarer Kegel, dessen Axe gegen die Ebene des Instruments so geneigt ist, daß seine höchst gelegene Seite dieser Ebene parallel läuft. Auf der verlängerten Axe des Kegels ist eine senkrechte Scheibe (*T*) angebracht, welche an eine auf der Unterlagsplatte (*A*) befestigte Schiene (*V*) angedrückt wird. Diese Schiene ist den Führungen parallel, in denen eine zweite, den Kegel tragende Platte (*B*) auf der untersten Platte (*A*) gleiten kann. Auf einem Schieber (*CD*), der die Bewegung der zweiten Platte (*B*) theilt, aber senkrecht auf diese Bewegung seine eigene hat, ruht ein Zählapparat, dessen Hauptstück ein Rädchen (*R*) ist, welches senkrecht auf der obersten Kegelseite steht und sich um eine zu dieser Seite parallele Axe (*mm'*) dreht. Durch diesen Schieber kann das Rädchen der Spitze und der Grundfläche des Kegels beliebig genähert werden. In dem vorderen Ende desselben Schiebers steht ein senkrechter Stift (*M*) zum Umfahren der zu berechnenden Figur.

Aus dieser Einrichtung folgt, daß, wenn der Stift *M* parallel zur Schiene *V* vor- oder rückwärts geführt wird, die Scheibe *T* vermöge ihrer Reibung auf der genannten Schiene sich nach der einen oder anderen Seite dreht, und zwar um einen Bogen, welcher der Längenbewegung des Stifts gleich ist.

Bezeichnet nun

x die Länge, um welche der Führungsstift parallel zur Schiene vor- oder rückwärts geschoben ist,

r den Halbmesser der Scheibe T, und

φ den Drehungswinkel dieser Scheibe in Bogenmaß, d. h. den Bogen vom Halbmesser Eins, welcher diesen Winkel mißt;

so ist der von dem Scheibenrande abgewickelte Bogen seiner Länge nach $r\varphi$, und seiner Richtung nach positiv oder negativ, je nachdem es der Weg x des Stiftes ist. Wir erhalten somit zunächst die Gleichung

$$\pm x = r\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wobei wir uns für x die Richtung von C nach E als die positive vorstellen wollen.

Der Kegel theilt die Bewegung der mit ihm festverbundenen Scheibe und veranlaßt seinerseits durch Reibung das Rädchen *R* ebenfalls zur Umdrehung. Der Bogen, um welchen sich dieses Rädchen dreht, ist offenbar jenem gleich, welcher auf der Kegelfläche von dem Rädchen berührt wurde.

Um diese Bögen auszudrücken, bezeichne

r_0 den Halbmesser des Kreises ab, nach welchem das Rädchen den Kegel berührt, so lange es nicht seitwärts verschoben wird,

r_1 den Halbmesser des Rädchens R, und

v den Drehungswinkel dieses Rädchens in Bogenmaß.

Da sich der Kegel mit der Scheibe T um den Winkel φ dreht, so entspricht dieser Drehung ein Berührungsbogen in der Ebene ab von der Länge $r_0\varphi$; und dem Drehungswinkel v des Rädchens gehört ein am Rande abgewickelter Bogen von der Länge $r_1 v$ an. Da diese beiden Bögen gleich sind, so ist $r_0\varphi = r_1 v$. Diese Gleichung gilt jedoch nur so lange, als das Rädchen seine Stellung gegen die Spitze oder die Basis des Kegels

nicht verändert, d. h. so lange, als r_0 constant ist. Das Umfahren einer Figur mit dem Stifte *M* erfordert aber, daß dieser nicht bloß vor- und rückwärts, sondern auch seitwärts, der Richtung des Schiebers *C* parallel, bewegt werde, wodurch sich eine Verstellung des Rädchens auf der Kegelseite *KS* und hieraus eine Veränderung des Halbmessers r_0 ergiebt. Es wird folglich während des Umfahrens einer Figur jeden Augenblick ein anderer Kreis auf dem Kegel berührt, und man darf wegen dieser Veränderlichkeit der Berührungskreise nicht mehr $r_0 \varphi = r_1 v$ nehmen, sondern muß die Differentiale der Berührungsbögen einander gleich setzen.

Zu dem Ende sei

y die Verschiebung des Stifts senkrecht auf die Axe der x, welche der Schiene *V* parallel ist,

ω der Neigungswinkel der Kegelseite gegen die Kegelaxe, und

r_0 bezeichne jetzt nur mehr den Halbmesser des Berührungskreises, auf welchem das Rädchen *R* beim Anfange der Bewegung des Stiftes *M* stand.

Hat dieser Stift während er um x vor- oder rückwärts gegangen ist, die Seitenbewegung $y = bb'$ gemacht, so ist in diesem Augenblick der Halbmesser des Berührungskreises gleich

$$b''c'' = r_0 + y \sin \omega,$$

wenn die Bewegung von dem Instrumente wegging, und gleich

$$b'c' = r_0 - y \sin \omega,$$

wenn die Bewegung auf das Instrument zuging. Das entsprechende Bogenelement ist somit für beide Fälle gleich

$$(r_0 \pm y \sin \omega)\, d\varphi.$$

Dieses Element veranlaßt auf dem Rädchen die Abwickelung des ihm gleichen unendlich kleinen Bogens $r_1 dv$; daher die Gleichung:

$$(r_0 \pm y \sin \omega)\, d\varphi = r_1 dv \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nimmt man aus Gleichung (1)

$$d\varphi = \pm \frac{dx}{r}$$

und setzt dessen Werth in (2), so kommt

$$\pm (r_0 \pm y \sin \omega)\, dx = r r_1 dv,$$

und wenn man integrirt:

$$\pm (r_0 x \pm \sin \omega \int y\, dx) = r r_1 v \quad . \quad . \quad (3).$$

Dividirt man diese Gleichung mit $\sin\ \omega$ und setzt den unveränderlichen Werth von

$$\frac{1}{\sin\ \omega} = m,$$

so erhält man

$$\pm (m r_0 x \pm \int y\, dx) = m r r_1 v \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt eine Fläche vor, deren Inhalt positiv oder negativ erscheint, je nachdem x positiv oder negativ ist, d. h je nachdem der Stift M vor- oder rückwärts geführt wird. Die Form dieser Fläche $(abcd)$ setzt sich immer aus einem Rechteck $(m r_0 x)$ und einer von einem rechten Winkel und einer krummen Linie begrenzten dreiseitigen Fläche $(\int y\, dx)$ zusammen, in der Weise, wie die vier Figuren 5, 6, 7, 8 zeigen, bei welchen auf die Vorzeichen des Integrals Rücksicht genommen ist. Die Flächen 5 und 6 entsprechen der Summe $m r_0 x + \int y\, dx$, und 7 und 8 der Differenz $m r_0 x - \int y\, dx$. Das Produkt $m r r_1 v$ auf der rechten Seite der letzten Gleichung besteht aus den constanten Factoren m, x, r_1 und dem veränderlichen Factor v: es ist somit die Fläche $m r_0 x \pm \int y\, dx$ dem Drehungswinkel v des Rädchens R proportional, und es bedarf nur eines mit diesem Rädchen verbundenen Apparates, welcher die Umdrehung desselben zählt, um die Größe der Fläche in dem Maße angezeigt zu erhalten, für welches der Zählapparat eingerichtet ist.

Dieser Apparat ist in den Figuren 3 und 4 nicht angedeutet, da es für unseren Zweck schon genügt, nur seine Aufgabe zu kennen. Wer übrigens mit dessen Einrichtung bekannt werden will, findet sie auf Tafel I des im Eingange angeführten Journals gezeichnet. Wir wollen auch die Theorie des Planimeters von Ernst nicht weiter verfolgen, sondern sofort zur Darlegung des Wesens des gleichbenannten Instruments von Wetli übergehen.

Dieser Planimeter hatte sich einer eben so gründlichen als ausführlichen Untersuchung durch Professor S. Stampfer in Wien zu erfreuen, und es ist dieselbe in der bereits genannten Abhandlung enthalten, aus der ich jenes Instrument kenne und nach der die folgende Beschreibung gebildet ist. In den Figuren 9 und 10 deute ich wieder nur durch einfache Linien die gegenseitige Lage der Haupttheile in vertikaler und horizontaler Projection an, weil dieses für meinen Zweck: die Uebereinstimmung dieses Planimeters mit dem vorhergehenden nachzuweisen, genügt.

A ist eine starke Metallplatte mit parallelen Schienen *NN'*, auf denen ein dreifüssiges Gestelle mittels Rollen (*E, E, E*) hin- und herläuft. In der Mitte des Dreifusses erhebt sich eine senkrechte Axe (*B*), um welche sich eine horizontale Scheibe (*S*), die auf der Trommel *T* festsitzt, dreht. Eine prismatische Stange (*G*) bewegt sich zwischen Rollen am Dreifuße senkrecht zu den Schienen *NN'*. Längs dieser Stange ist ein Silberdraht (*K*) ausgespannt, der sich um die Trommel *T* schlingt und beim Hin- und Herschieben der Stange die Trommel und Scheibe in Umlauf setzt. An dem einen Ende dieser verschiebbaren Stange befindet sich ein senkrechter Stift (*M*) zum Umfahren der auszumessenden Figur. Auf der Metallplatte *A* stehen ferner zwei Träger (*O*), zwischen denen sich ein Rahmen (*U*) um eine zur genannten Platte parallele Axe (bei *z'*) drehen läßt. Dieser Rahmen trägt nach seiner Mittellinie *zz'* eine in Spitzen laufende Axe (*P*) mit einem Rädchen *R*, das nahehin senkrecht auf der mit feinem Papier überzogenen Messingscheibe *S* steht und von dieser, wenn sie sich dreht, zur Bewegung um seine Axe veranlaßt wird. Mit den Trägern *O* ist ein Zählapparat verbunden, der durch die Axe des Rädchens *R* in Thätigkeit gesetzt wird und dessen Umdrehungen anzeigt.

Die Wirkungsweise dieses Instruments ist so einfach wie die des vorhergehenden. Steht nämlich der Stift *M* auf einem bestimmten Punkt des Umfangs der auszumessenden Figur und wird er in der Richtung des Silberdrahtes vor- oder rückwärts geschoben, so dreht der Draht die Trommel und die Scheibe, diese

aber das Rädchen R und hierdurch den Zeiger am Uhrwerk ebenfalls vor- oder rückwärts. Führt man dagegen den Stift in einer zur vorigen senkrechten, also zur Axe P parallelen Richtung, so wird sich weder Trommel, noch Scheibe, noch Rädchen, noch Zeiger drehen; es erfolgt weiter nichts als eine Verstellung des Scheibenmittelpunktes gegen den Berührungspunkt des Rädchens, d. h. eine Aenderung des Halbmessers des Kreises, nach welchem dieses Rädchen die Scheibe berührt. Liegt endlich der Weg des Stifts zwischen jenen zwei senkrechten Hauptrichtungen, so findet gleichzeitig eine Drehung der Scheibe und des Rädchens, so wie eine Verstellung des Scheibenmittelpunktes gegen das Rädchen statt, und es wird in jedem Augenblicke ein Element eines anderen Berührungskreises auf der Scheibe S abgewickelt.

Nach dieser Auseinandersetzung des Zusammenhangs der einzelnen Theile des Instruments ist es leicht, denselben durch Formeln auszudrücken. Beziehen wir dieselben auf rechtwinkelige Coordinatenaxen, wovon die der x dem Draht und die der y den Schienen parallel ist, und bezeichnet

- x die Länge der Bewegung des Stifts in der Richtung der Abscissenaxe, wobei die Richtung vom Instrumente weg als positiv gelten soll;
- y die Länge der Bewegung parallel zur Ordinatenaxe;
- r den Halbmesser der Trommel, bis in die Mitte des Drahtes genommen,
- r_1 den Halbmesser des Rädchens R,
- r_0 den Abstand des Berührungspunktes dieses Rädchens vom Scheibenmittelpunkte beim Anfang der Bewegung, wobei wir den linken Abstand als positiv gelten lassen,
- φ den Drehungswinkel der Trommel und Scheibe in Bogenmaß, und
- v den Drehungswinkel des Rädchens in demselben Maße;

so ist erstens das von der Rolle abgewickelte Drahtstück gleich der Verschiebung des Stifts nach der Abscissenaxe, daher

$$\pm x = r\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und zweitens das Bogenelement $r_1 dv$ des Rädchens gleich dem

Elemente des Berührungskreises auf der Scheibe, welches, da der Halbmesser dieses Kreises veränderlich und gleich $\pm\ (r_0 \pm y)$ ist, durch $\pm\ (r_0 \pm y)\ d\varphi$ ausgedrückt wird; es ist somit

$$\pm\ (r_0 \pm y)\ d\varphi = r_1\, dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nimmt man aus (5)

$$d\varphi = \pm\ \frac{dx}{r}$$

und setzt es in die letzte Gleichung, so wird

$$\pm\ (r_0 \pm y)\ dx = r r_1\ dv$$

erhalten, woraus sich durch Integration ergiebt:

$$\pm\ (r_0 x \pm \int y dx) = r r_1 v \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Der Ausdruck $r_0 x$ stellt ein Rechteck und $\int y dx$, welches hier zwischen den Grenzen o und x genommen gedacht wird, eine dreiseitige Fläche vor, welche von einem rechten Winkel, dessen einer Schenkel x ist, und einer die Hypotenuse vertretenden krummen Linie, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, gebildet wird. Die linke Seite der Gleichung (7) stellt demnach gerade so, wie dieselbe Seite der Gleichung (4) die vier Flächenformen Fig. 5, 6, 7, 8 dar, und die beiden Vorzeichen deuten an, daß diese Flächen bald additiv bald subtraktiv auftreten. Die rechte Seite bildet ein Produkt aus den beiden constanten Faktoren r und r_1 und dem veränderlichen Faktor v;

es ist somit hier, wie bei dem Planimeter von Ernst, der Drehungswinkel v des Rädchens R der Fläche $r_0 x \pm \int y dx$ proportional.

Und beide Formeln (4) und (7) gehen ganz in einander über, wenn man in der ersteren $m = 1$, d. h. $sin\ \omega = 1$ und mithin $\omega = 90^0$ setzt. Ein Kegel aber, dessen Seite mit der Axe einen rechten Winkel bildet, ist eine Scheibe, und in der Vertauschung des Kegels mit der Scheibe besteht die Hauptveränderung des Ernst'schen Planimeters, welche Wetli vorgenommen hat, während die Nebenänderungen bloß Verbesserungen der beiden Grundbewegungen und des Zählapparats oder Uhrwerks sind.

Wenn sich somit klar herausstellt, daß der Wetli'sche Planimeter nicht eine neue Erfindung ist, so folgt aber daraus

keineswegs, daß er nicht auch eine bedeutende Verbesserung sei. Ich will mit dem gelieferten Nachweise das Verdienst Wetli's um die Vervollkommnung der Planimeter nicht im mindesten schmälern: ich erkenne vielmehr seine Abänderungen am Ernst'schen Planimeter als sinnreiche und zweckmäßige an, und bin überzeugt, daß erst durch sie eine Zukunft für die Planimeter geschaffen wurde.

3. Der Planimeter von Ausfeld.

Die Planimeter aus dem mechanisch-optischen Institute von Hermann Ausfeld in Gotha sind dem Wesen nach jenen von Wetli gleich, zeichnen sich aber vor diesen durch mehrere von Hrn. Hofrath Hansen und dem Verfertiger herrührende Verbesserungen aus, die später angeführt werden. Diese weitere Vervollkommnung der Flächenmesser und der Wunsch, etwas zur allgemeineren Kenntniß und Verbreitung der so vielfältig zu gebrauchenden Instrumente beizutragen, veranlaßten mich, den für meinen Gebrauch bestimmten Planimeter der hiesigen kgl. polytechnischen Schule ausführlich zu untersuchen und zu beschreiben.

a. Beschreibung.

Wenn aus der Beschreibung des Wetlischen Planimeters das Wesen des Ausfeld'schen bereits erkannt worden ist, so werden die Einzelnheiten des letzteren, welche in Fig. 11 perspektivisch gezeichnet sind, um so leichter verstanden werden. Das Instrument sieht zusammengesetzter aus als es in der That ist: es rührt dieses aber nur von der großen Anzahl Rollen her, welche zur Erzielung genauer Bewegungen nöthig ist. Denkt man sich diese weg, so bleiben bloß das Fußgestelle, die beiden Schlitten, die Führvorrichtung, die Drehscheibe und das Uhrwerk als Bestandtheile übrig, die nun einzeln betrachtet werden sollen.

Das Fußgestelle besteht aus einem 30 Centimeter langen, vorne 10 und hinten 15 Centimeter breiten und 1,2 Centimeter dicken Messingrahmen (*A*), welcher mit drei Stellschrauben (*B*) auf beweglichen Holzscheibchen (*C*) ruht. Durch die Stellschrauben

kann der Rahmen höher, tiefer und horizontal gestellt werden. Die horizontale Lage ist jedoch nicht strenge, sondern nur so weit erforderlich, daß den beiden Schlitten keine Veranlassung zu einer freiwilligen Bewegung gegeben wird.

Der untere Schlitten gibt die eine Grundbewegung des Apparats, nämlich jene nach der Langseite des Rahmens. Er besteht aus einer sechsfach durchbrochenen 0,8 Centimeter dicken Metallplatte (*D*) und drei in Spitzen laufenden Rollen (*E*), welche in drei Längendurchbrechungen angebracht sind, und wovon die beiden vorderen durch die Nuthen (*N*) des Rahmens auf die in Fig. 12 angedeutete Weise ihre Führung erhalten, während die hintere dritte Rolle flach ausläuft. Die Rollen sind von Messing, ihre Axen und deren Lager von Stahl.

Der obere Schlitten gibt die zweite Grundbewegung, welche zur ersten senkrecht ist, für sich; er muß aber auch jede Bewegung des unteren Schlittens mitmachen. Darum ruht sein Hauptstück (*G*), eine trapezförmig gestaltete und dreimal durchbrochene, 42 Centimeter lange und 0,7 Centimeter dicke Messingschirme, auf drei Rollen (*E'*), welche in den drei Querdurchbrechungen des unteren Schlittens an stählernen Axen in feinen Spitzen laufen, und wovon die beiden rechtseitigen, wie Fig. 12 in verkehrter Lage zeigt, in einer Nuthe der Schiene sich drehen, während die dritte Rolle glatt unter der Schiene liegt. Damit der Schlitten von seiner Unterlage nicht abfällt und eine möglichst sichere, aber auch leichte Bewegung gestattet, wird er durch drei auf seiner Oberfläche befindliche Leitrollen (*F*) sanft an die unteren Rollen angedrückt. Diese Leitrollen sind mit Messingfedern an einen auf das Hauptstück des unteren Schlittens geschraubten Träger (*H*) befestigt. In den beiden Ansätzen *K* und *K'* des oberen Schlittens ist parallel zu dessen Bewegungsrichtung ein Silberdraht von der Stärke Nr. 25 eingeklemmt, welcher sich um die Trommel der Drehscheibe schlingt.

Der Führer oder die Vorrichtung zum Umfahren der auszumessenden Fläche ist mit dem vorderen Ende des oberen Schlittens verbunden. Sein Hauptstück ist ein zur Ebene des Instruments

senkrecht stehender Träger (L), welcher durch zwei Schräubchen (a, b) höher und tiefer gestellt, horizontal gedreht und festgeschraubt werden kann. An diesem Träger befindet sich erstens eine Fassung für ein Glas (M), das in der Mitte einen kleinen Kreis hat, dessen Mittelpunkt auf dem Umfange der auszumessenden Figur herumgeführt wird; zweitens eine Lupe (O), welche diesen Kreis und die darunter befindliche Umfangslinie vergrößert, und drittens ein horizontaler Stift (P), welcher zur Bewegung der ganzen Vorrichtung dient.

Die Drehscheibe (S) von 10,5 Centimeter Durchmesser und 3 Millimeter Dicke ruht mittels einer Trommel (T) auf einem massiven Zapfen, der mit dem unteren Schlitten senkrecht und fest verbunden ist. Die messingene Scheibe ist an der Oberfläche ganz eben abgeschliffen und, damit sie eine mäßige Reibung zwischen sich und dem daraufstehenden Rädchen veranlasse, mit feinem gleichmäßig dicken Papiere überzogen. Die Trommel, um welche sich der Silberdraht des oberen Schlittens schlingt, ist genau cylindrisch abgedreht und ihre mit der Axe des Zapfens zusammenfallende Mittellinie geht durch den Mittelpunkt der Scheibe, auf welcher sie senkrecht steht. Der Durchmesser der Trommel beträgt an unserem Instrumente 6,97 bayerische Dezimallinien oder 20,34 Millimeter.

Das Uhrwerk oder der Theil des Instruments, welcher durch die Drehscheibe bewegt wird und die Größe der auszumessenden Fläche angibt, ruht auf zwei mit dem Fußgestelle verbundenen Trägern (Q) und besteht erstens aus einem Messingrädchen R, welches mit seinem schmalen Rande auf der Drehscheibe steht und dessen Umdrehung der umfahrenen Fläche proportional ist. Sein Durchmesser hängt von der Einheit ab, in welcher die Fläche ausgedrückt werden soll. Zweitens aus einer Hauptaxe (X), an welcher sich das oben genannte Rädchen, ein kleines Getriebe und ein Zeiger (Z) befinden, und welche bei c und c' in feinen Spitzen läuft, während ihre Projection auf die Scheibe durch deren Mittelpunkt geht. Drittens aus einem kleinen Messingrahmen (U), der durch das Schräubchen e und den Hebel h um eine dem

Silberdrahte parallele Axe dd' um Weniges auf und nieder bewegt werden kann und dessen linke Seite ein Lager (c) der Hauptaxe enthält. Die rechte Seite trägt ein Gegengewicht (W), dessen Bestimmung ist, den Druck des Rädchens R auf die Scheibe zu vermehren oder zu vermindern, je nachdem die Reibung zwischen beiden es erfordert. Viertens aus einem Hauptzifferblatte (Z^0) und zwei Nebenzifferblättern (z', z''), deren Zeiger ihre Bewegung durch die Hauptaxe des Uhrwerks und mit dieser in Verbindung stehende Zahnrädchen erhalten. Das Hauptzifferblatt, an den Rahmen U befestigt, enthält an seinem unteren Rande einen Träger V, in dessen Kopfe sich das zweite Lager (c') der Hauptaxe befindet. Die Bewegungen der Zeiger und die Theilungen der Zifferblätter sind auf dem Planimeter der hiesigen polytechnischen Schule so angeordnet, daß der Zeiger an dem Hauptzifferblatte (Z^0) die Einheiten der Fläche bis zu 100, jener an dem rechtseitigen Zifferblatte (z'') bis zu 10 Hundert ($o\,o$), und der am linkseitigen Zifferblatte bis zu 10 Tausend ($o\,o\,o$) angibt. Ist z. B. die Einheit der Fläche eine Quadratlinie und der Stand der Zeiger wie in Fig. 13, so ist die Ablesung : 5 Tausend 2 Hundert und 14 Quadratlinien. Statt der Quadratlinien können aber auch andere Einheiten der Fläche erhalten werden, wenn nur ein anderes Rädchen (R) von entsprechendem Durchmesser an die Hauptaxe gesteckt wird. Für den hiesigen Planimeter habe ich drei Rädchen anfertigen lassen, welche 1 bayerische Dezimal-Quadratlinie, 1 englische Duodezimal-Quadratlinie und 4 Quadrat-Millimeter als Flächeneinheit angeben. Wäre das letzte Rädchen angesteckt, so würde die Ablesung nach Fig. 13 = 5214 mal 4, d. i. = 20856 Quadratmillimeter sein. Wird ein Planimeter vorzugsweise zu Flächenberechnungen für Katasteraufnahmen benützt, so kann man das Uhrwerk leicht so einrichten, daß das linkseitige Zifferblatt (z') Tagwerke, das rechtseitige Dezimalen oder Quadratruthen und das Hauptzifferblatt Theile von letzteren angibt. Diese Theile werden um so kleiner sein, je größer der Maßstab der Aufnahme ist, und es ist leicht einzusehen, daß dieselbe Einrichtung für verschiedene Maßstäbe

gebraucht werden kann, wenn man nur die angezeigte Fläche mit dem Quadrat des Verhältnisses des neuen zum alten Maßstabe dividirt. Besser ist es jedoch, für jeden besonderen Maßstab besondere Rädchen zu haben.

b. Theorie.

Ein Theil der Theorie des Hansen'schen Planimeters ist bereits in Nro. 2 gegeben, indem die für das Wetli'sche Instrument aufgestellten Gleichungen (5) bis (7) ohne die mindeste Einschränkung auch für jenes gelten. Wir wissen demnach schon, daß durch die Bewegung des Führers auf einer beliebigen geraden oder krummen Linie, deren Natur die Gleichung $y=f(x)$ ausdrückt, das Rädchen R um einen Winkel v gedreht wird, welcher den durch den Ausdruck $r_o x \pm \int y\, dx$ vorgestellten Flächen (Fig. 5 bis 8) proportional ist, wenn die befahrene Linie be zwischen b und e ihre Stetigkeit nicht ändert. Wir wissen aber noch nicht, was geschieht, wenn eine ganz beliebige geschlossene ebene Figur, deren Umfangslinie in ihrer Stetigkeit oft unterbrochen ist, umfahren wird. Und darüber soll die folgende Betrachtung Aufschluß geben.

Denken wir uns den Umfang einer wie immer beschaffenen ebenen Figur aus n Stücken bestehend, wovon jedes eine stetige gerade oder krumme Linie ist; bezeichnen wir die Endpunkte dieser Stücke mit 0, 1, 2, 3, ... n, ihre Coordinaten in Bezug auf rechtwinkelige durch den Punkt 0 gelegte Axen beziehlich mit $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ und $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$; nennen wir ferner r_0 den Abstand des Rädchens R vom Mittelpunkt der Drehscheibe im Anfang der Bewegung, d. h wenn der Führer auf dem Punkt 0 der Figur steht, so daß also dieser Abstand für den Punkt 1 gleich $r_0 + y_1$, für den Punkt 2 gleich $r_0 + y_2$ u. s. w. für den Punkt m gleich $r_0 + y_m$ wird; bezeichnen wir weiter durch v_1 den Drehungswinkel des Rädchens R für die Bewegung des Führers von 0 bis 1, durch v_2 den Drehwinkel für die Bewegung von 1 bis 2, u. s. w. f. durch v_m den Drehungswinkel für die Bewegung von m-1 bis m; und erlauben wir uns endlich der Kürze halber $\int y_m\, dx$ für das Integral von $y\, dx$ zwischen den Grenzen $x = x_{m-1}$ bis $x = x_m$ zu schreiben: so

ist ganz allgemein nach der Grundgleichung (7) für die Bewegung des Führers von

$$
\begin{array}{llll}
0 \text{ bis } 1 & \ldots\ldots & \pm\, r r_1 v_1 = r_0 x_1 & \pm \int y_1 dx \\
1 - 2 & \ldots\ldots & \pm\, r r_1 v_2 = (r_0 + y_1)(x_2 - x_1) & \pm \int y_2\, dx \\
2 - 3 & \ldots\ldots & \pm\, r r_1 v_3 = (r_0 + y_2)(x_3 - x_2) & \pm \int y_3\, dx \\
3 - 4 & \ldots\ldots & \pm\, r r_1 v_4 = (r_0 + y_3)\, x_4 - x_3) & \pm \int y_4\, dx \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots \\
n-1 \text{ bis } n & \ldots\ldots & \pm\, r r_1 v_n = (r_0 + y_{n-1})(x_n - x_{n-1}) & \pm \int y_n dx.
\end{array}
$$

Addirt man diese n Gleichungen und bezeichnet die Summe aller v durch $\Sigma\,(v)$, so wird, da die mit r_0 verbundenen x sich bis auf x_n aufheben und dieses selber null ist:

$$\pm\; r r_1 \Sigma(v) = \pm \int y_1\, dx + y_1\; (x_2 - x_1) \pm \int y_2\, dx +$$
$$+\, y_2\, (x_3 - x_2) \pm \int y_3 dx + \ldots\ldots + y_{n-1}\, (x_n - x_{n-1}) \pm \int y_n dx$$

Eine einfache Untersuchung der rechten Seite dieser Gleichung lehrt, daß dieselbe den Flächeninhalt der unserer Betrachtung zu Grunde gelegten ganz beliebigen ebenen Figur vorstellt. Denn die Ausdrücke $\pm \int y_1\; dx,\; y_1\, (x_2 - x_1) \pm \int y_2\; dx,\; y_2\; (x_3 - x_2) \pm \int y_3\; dx$ u. s. w. bezeichnen die aufeinanderfolgenden Flächentheile, in welche die ganze Figur durch die von ihren Eckpunkten aus auf die Abscissenaxe senkrecht gezogenen Ordinaten zerlegt wird, wenn die genannte Axe durch den Anfangspunkt 0 geht: ihre Summe muß somit die ganze Fläche geben. Nennen wir den Inhalt dieser Fläche F, so geht die letzte Gleichung über in

$$F = \pm\; r r_1\; \Sigma(v) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

und hieraus lassen sich alle Fragen beantworten, welche sich auf die Wirkungsweise und den Gebrauch des Planimeters beziehen.

Nimmt man vorläufig auf die Vorzeichen des Ausdrucks $r r_1\;\; \Sigma(v)$ keine Rücksicht und bemerkt, daß das Produkt $r r_1$ für jedes Instrument eine unveränderliche Größe ist, so lehrt die letzte Gleichung:

1. daß die algebraische Summe aller Drehungen des Rädchens R und folglich auch des Hauptzeigers der umfahrenen Fläche proportional ist.

Es kommt also, wenn der Zählapparat den Inhalt der Fläche

selbst angeben soll, nur darauf an, die Flächeneinheit auszumitteln, welche ein Theil des Hauptzifferblatts vorstellt. Diese Ausmittelung ist aber sehr einfach. Denn da F jede Fläche vorstellt, so kann es auch diejenige bezeichnen, welche durch eine ganze Umdrehung des Hauptzeigers angezeigt werden soll. Wir wollen diesen besonderen Werth von F mit F^1 bezeichnen. In diesem Falle muß selbstverständlich die algebraische Summe aller Drehungen

$$\Sigma(v) = 2\pi$$

sein, und daher auch

$$F^1 = 2rr_1\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese Gleichung gibt die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Halbmesser r und r_1 von der Fläche F^1 an und läßt sich in Worten so ausdrücken:

2. Die durch einen ganzen Umlauf des Hauptzeigers vorgestellte Fläche ist gleich dem Produkte aus dem Umfang der Trommel in den Halbmesser des Rädchens R.

Ist das Hauptzifferblatt in n gleiche Theile getheilt, wovon jeder eine Fläche f vorstellt, so daß $F^1 = nf$, so wird $nf = 2rr_1\pi$, und hieraus folgt:

$$f = \frac{2rr_1\pi}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und

$$r_1 = \frac{nf}{2r\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Man kann demnach leicht die Fläche f berechnen, welche einer von den n Theilen des Hauptzifferblattes vorstellt, wenn der Halbmesser r_1 des Rädchens R gegeben ist; oder auch diesen Halbmesser so bestimmen, daß ein Theil des Zifferblatts eine gegebene Fläche f ausdrückt.

An unserem Instrumente ist z. B. der Halbmesser der Trommel $r = 3{,}485$ bayerische Dezimallinien und das Hauptzifferblatt in 100 gleiche Theile getheilt. Soll nun einer dieser 100 Theile eine Quadrat-Dezimallinie vorstellen, so muß der Halbmesser des Rädchens

$$r_1 = \frac{100}{2 \times 3{,}485 \times \pi} = 4{,}567''' \text{ b. Dez.}$$

sein. Wie groß müßte aber der Halbmesser dieses Rädchens werden, wenn ein Theil desselben Zifferblattes auf einem im 2500 theiligen Maßstabe gezeichneten Plane eine sogenannte „Dezimale"*) angeben sollte?

Nach der Verjüngung von 1 : 2500 stellt 1 Dezimallinie eine Länge von 25 Fuß und daher 1 Quadratlinie eine Fläche von 625 □ Fuß vor. Da der 100ste Theil des Umfangs 1 Dezimale oder 400 □' ausdrücken soll, so gehört dazu eine verjüngte Fläche

$$f = \frac{400}{625} = 0{,}64 \;\square \text{ Linien,}$$

und ein Halbmesser des Rädchens

$$r_1 = \frac{100 \times 0{,}64}{2 \times 3{,}485 \times \pi} = 2{,}922''' \text{ b. Dez.}$$

Da aus dem Ausdruck für die Fläche der umfahrenen Figur der anfängliche Abstand r_0 des Berührungspunktes des Rädchens R von dem Mittelpunkte der Drehscheibe wegfiel, und dieser Abstand gerabezu von dem Stande des Führers abhängt, so folgt daraus

3. daß es der Theorie nach gleichgültig ist, an welcher Stelle des Umfangs einer geschlossenen Figur, deren Fläche bestimmt werden soll, das Umfahren beginnt und endigt.

In der Praxis kann jedoch die Voraussetzung, auf welcher dieser Satz beruht, daß man nämlich am Ende des Umfahrens absolut genau in den Anfangspunkt zurückkehre, nicht mit aller Strenge erfüllt werden, und es entspringt hieraus ein Fehler, dessen Größe von dieser Ungenauigkeit und der Lage des Berührungspunktes des Rädchens und der Drehscheibe am Anfang oder Ende der Bewegung abhängt. Aus den Gleichungen (5) und (6), welche

$$(r_0 \pm y)\, dx = r r_1\, dv$$

liefern, kann man leicht entnehmen, daß ein Fehler $d'x$ in der

*) In Bayern der 100ste Theil eines Tagwerks von 40000 □ Fuß, demnach = 400 □ Fuß.

Richtung der Abscissenaxe (oder des Drahtes) einer Fehlerfläche $(r_0 \pm y)\, d'x$ und ein Fehler $d'y$ in der Richtung der Ordinatenaxe einer Fehlerfläche $d'y\, dx$ entspricht. Die gefährlichsten Fehler sind somit jene, welche in der Richtung von oder zum Instrumente gemacht werden, weil sie die gesuchte Fläche um ein Rechteck unrichtig geben, dessen eine Seite der Fehler $(d'x)$ in der Verschiebung und dessen andere Seite der Abstand $(r_0 \pm y)$ des Berührungspunktes beider Scheiben ist. Da aber diese Fehler um so kleiner werden, je weniger der letztgenannte Abstand beträgt, und da die in der Richtung der Ordinatenaxe begangenen kleinen Fehler nur sehr geringe Folgen haben, so ergiebt sich für die Anwendung des Planimeters folgende Regel:

4. Man wähle den Anfangspunkt des Umfahrens so, daß der Berührungspunkt beider Scheiben in der Nähe des Mittelpunkts der Drehscheibe stattfinde, oder doch so, daß er in einer zur Länge des Instruments parallelen Stelle des Umfangs liege.

Hat man für die Bezeichnung des Zifferblattes eine bestimmte Richtung angenommen, so ist es nicht mehr gleich, nach welcher Richtung die auszumessende Fläche umfahren wird. Das geht aus den Vorzeichen $\pm$ des Ausdrucks für F hervor. Denn darnach erscheint der Flächeninhalt als eine positive oder negative Größe, je nachdem man die Figur nach der einen oder anderen Richtung umfährt. Welche Richtung als positiv angesehen werden soll, ist willkührlich; gewöhnlich aber wird man diejenige dafür auswählen, welche der Nummerirung des Zifferblattes einer Uhr entspricht. Gibt nun für diese Richtung der Zählapparat die Fläche richtig an, so muß dieselbe bei allen Figuren eingehalten werden, deren Inhalt nach dem Umfahren auf dem Zifferblatte, das anfangs auf Null gestellt war, direkt abgelesen werden soll. Nennen wir diese, dem Zifferlauf einer Uhr entsprechende Richtung die „rechtsläufige" und die entgegengesetzte die „linksläufige", so läßt sich für den Gebrauch des Wetli-Ausfeld'schen Planimeters die weitere Regel aufstellen:

5. **Jede Figur, deren Flächeninhalt auf dem anfangs auf Null gestellten Zählapparate direkt abgelesen werden soll, muß rechtsläufig umfahren werden.**

Es gibt zwar Fälle, in welchen auch eine linksläufige Bewegung am Platze ist; sie thun aber der eben aufgestellten Regel keinen Eintrag. Wenn nämlich eine Fläche als die Differenz zweier anderer zusammenhängender Flächen erscheint, so wird dieser Unterschied, wie aus der vorhergehenden Erörterung schon folgt, und auch die Erfahrung beweist, sofort durch das Instrument angezeigt, wenn man die größere Fläche rechtsläufig und die kleinere linksläufig umfährt. Man kann sich von dieser Wirkungsweise leicht Rechenschaft geben, wenn man einmal eingesehen hat, daß der Zeiger nach rechtsläufiger Umfahrung der größeren Figur um einen Bogen vorwärts geht, welcher deren Inhalt anzeigt, und daß er durch linksläufiges Umfahren der kleineren Figur um einen Bogen zurückgeht, welcher dem Inhalte dieser entspricht: er wird alsdann nur mehr um die Differenz dieser Bögen von Null entfernt stehen und somit die diesem Bogenunterschiede entsprechende Flächendifferenz angeben. Es ist auch leicht einzusehen, daß man die größere Fläche nicht vorher und die kleinere nachher ganz und gesondert zu umfahren braucht, sondern daß man, nachdem ein Stück von der größeren Fläche rechtsläufig umfahren ist, sogleich an der betreffenden Stelle die kleinere linksläufig umfahren und nun auf der größeren Fläche bis zum Ausgangspunkt der Bewegung rechtsläufig fortgehen kann. Ein Beispiel wird dieses noch deutlicher machen.

Angenommen, es soll die nicht schraffirte Fläche der Figur 14 ausgemessen werden: so stelle man die Zeiger auf Null und beginne das Umfahren in dem ganz beliebigen Punkte C, gehe von da rechtsläufig über D bis A, von hier über E und F linksläufig bis A, und nun wieder rechtsläufig über B bis zum Anfangspunkte C. Die Zeiger geben dann den gesuchten Inhalt an. Wird dieselbe Figur von C aus über D nach A, und von hier über F nach E, A, B, C, also durchweg rechtsläufig umfahren,

so zeigt der Apparat die Summe der beiden Flächen *CDABC* und *AEFA* an, weil der Inhalt beider positiv erscheint.

Diese Erörterungen lassen sich in den Satz zusammenfassen:

6. Die anfangs auf Null gestellten Zeiger des Planimeters geben die Summe oder Differenz zweier zusammenhängender Flächen an, je nachdem man beide rechtsläufig oder die größere rechtsläufig und die kleinere linksläufig umfährt.

Eine für den Gebrauch des Planimeters wichtige Regel entspinnt sich aus folgenden Betrachtungen des Herrn Hofraths Hansen. Wenn man nämlich für die Ermittelung des Flächeninhalts einer Figur, deren größte Breite kleiner ist als der Halbmesser der Drehscheibe, den Planimeter so aufstellt, daß alle Berührungspunkte des Rädchens *R* und der Drehscheibe auf einer und derselben Seite des Mittelpunkts dieser Scheibe liegen, so muß der Zeiger nothwendig in dem einen Theile des Umfahrens vorwärts und in dem anderen rückwärts gehen. Er muß daher einen weit größeren Weg durchlaufen als der ist, den er am Schlusse seiner Bewegung anzeigt. Die gemessene Fläche besteht also in der That in diesem Falle aus zwei Flächen, deren Unterschied sie ist; und diese beiden Flächen können unter Umständen weit größer sein als jene, so daß das vom Planimeter angegebene Resultat aus der kleinen Differenz zweier weit mehr betragenden Größen besteht. Solche Ermittelungen soll man aber wegen ihrer größerer Fehlerquellen in der Praxis vermeiden. Der in Rede stehende Planimeter sowohl wie der von Wetli machen es möglich, den erwähnten Uebelstand zu vermeiden, und zwar dadurch, daß man demselben beim Gebrauche eine solche Aufstellung gibt, daß die Berührungen auf der Drehscheibe möglichst zu beiden Seiten ihres Mittelpunkts vertheilt sind; was sich nach folgender Regel bewerkstelligen läßt:

7. Bei der Aufstellung des Planimeters ziehe man den oberen Schlitten ein angemessenes Stück

heraus und halte den unteren so, daß das Rädchen R die Drehscheibe beiläufig in deren Mittelpunkt berührt, und bringe nach dem Augenmaße die Mitte der Figur unter den Führer.

Bei dieser Aufstellung, die selbstverständlich nicht mit ängstlicher Sorgfalt zu geschehen braucht, gibt der Planimeter die gesuchte Fläche durch Addition von Flächentheilen; und diese vortheilhaftere Art der Flächenbestimmung ist von Wetli dadurch bewirkt worden, daß er die Scheibe an die Stelle des vorher angewandten Kegels setzte, welcher die zu messende Fläche stets nur durch Subtraction zweier weit größerer Flächen gab. Die Vertauschung der Scheibe mit dem Kegel bezeichnet daher einen wesentlichen Fortschritt in der Ausbildung der Planimeter.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß sich die beiden Schlitten senkrecht zu einander bewegen; es läßt sich aber leicht zeigen, daß diese Voraussetzung nicht unumgänglich nothwendig ist. Denn nimmt man an, daß die Bewegungsrichtungen einen Winkel α mit einander bilden und bezieht die folgenden Rechnungen auf Coordinatenaxen, welche diesen Richtungen parallel sind und demnach auch den Winkel α einschließen, so ist wie früher in Gleichung (5):

$$\pm\, x = r\varphi$$

und wenn jetzt r_0 den Abstand des Berührungspunktes des Rädchens R vom Scheibenmittelpunkte in der Richtung der Hauptaxe, welche der Ordinatenaxe parallel angenommen wird, und y' die zu x gehörige schiefwinkelige Ordinate bezeichnet, so ist ferner aus den zu Gleichung (6) entwickelten Gründen:

$$\pm\, (r_0 \pm y')\, d\varphi = r_1\, dv;$$

und demnach, wenn $d\varphi$ aus der vorletzten Gleichung gesucht und in die vorstehende gesetzt, hierauf aber auf beiden Seiten integrirt wird:

$$\pm\, (r_0\, x \pm \int y' dx) = r r_1\, v.$$

Wendet man diesen Ausdruck auf die Bewegung des Führers über die n geraden oder krummen Seiten einer beliebigen geschlossenen Figur an, in der Weise, wie es bereits weiter oben

für rechtwinkelige Axen geschehen ist, so wird die Summe der n Gleichungen, welche man dadurch erhält, den Ausdruck liefern:

$$F = \pm\, r r_1\, \Sigma\,(v).\ sin\, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

welcher sich von jenem mit (8) bezeichneten nur dadurch unterscheidet, daß das constante Produkt $r r_1$ noch mit einem anderen constanten Factor $sin\, \alpha$ multiplicirt ist. Dieser Umstand hat keine andere Wirkung, als daß der Halbmesser r_1 des Rädchens R an einem Planimeter, dessen Bewegungsrichtungen den Winkel α bilden, ein anderer sein muß als für einen Apparat, dessen Grundbewegungen rechtwinkelig sind. Es läßt sich somit der Satz aufstellen:

8. Die Bewegungsrichtungen der beiden Schlitten können auch einen schiefen Winkel bilden, wenn nur der Halbmesser des Rädchens R mit Rücksicht auf diesen Winkel bestimmt wird.

Diesen Halbmesser findet man aus (12) unter Anwendung derselben Betrachtungsweise, welche den Ausdruck (11) lieferte, gleich

$$r_1 = \frac{n f}{2\, r \pi.\ sin\, \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Wenn ferner vorausgesetzt wurde, daß die Hauptaxe der Bewegungsrichtung des unteren Schlittens parallel laufe, so ist diese Voraussetzung ebenfalls nicht unbedingt nöthig; sie wurde nur gemacht, weil ihre Erfüllung die Theorie des Instruments vereinfacht. Nehmen wir aber jetzt an, die beiden Grundbewegungen bilden wie vorhin einen constanten Winkel α, und die Hauptaxe schließe mit der Bewegungsrichtung des unteren Schlittens, also auch mit der Ordinatenaxe, den Winkel β ein: so kann in Fig. 15 die Linie AX die Abscissen- und AY die Ordinatenaxe vorstellen, während S die Drehscheibe, R das Rädchen, P die Hauptaxe und RT die der Ordinatenaxe parallele Berührungslinie des Rädchens R und der Drehscheibe bezeichnet. Heißt der anfängliche Abstand Rc des Rädchens vom Scheibenmittelpunkte, in der Richtung T gemessen, wieder r_0, und stellt S' die Scheibe vor, nachdem sie um y' vorwärts geschoben wurde, so ist der dieser Stellung ent-

sprechende Abstand $= Rc' = r_0 + y'$, und das hiezu gehörige Bogenelement $(r_0 + y')\ d\varphi$. Dieses Element hat die Richtung $e\ l$, welche von c' aus bestimmt wird. In dem vorliegenden Falle kann aber nur seine Projektion auf die Ebene des Rädchens, d. h. $(r_0 + y')\ cos\ \beta.\ d\varphi$ dem vom Rädchen abgewickelten Bogenelemente $r_1\ dv$ gleich sein; daher die Gleichung

$$(r^0 + y')\ cos\ \beta.\ d\varphi = r_1\ dv;$$

wozu die früher entwickelte Gleichung (5) für die Bewegung des Drahtes und der Trommel:

$$x = r\varphi$$

den Ausdruck für $d\varphi$ liefert. Wir erhalten demnach, wenn noch durch die Vorzeichen alle möglichen Fälle angedeutet werden, die beiden Hauptgleichungen der vorhergehenden Nummer wieder, nur mit dem Unterschiede, daß hier die linke Seite noch mit der constanten Größe $cos\,\beta$ multiplicirt ist; und wir werden demnach auf demselben Wege, der dort angezeigt wurde, zu der Endgleichung gelangen:

$$F = \pm\ r r_1\ \Sigma(v)\ \frac{sin\ \alpha}{cos\ \beta}\quad .\ .\ .\ \ (14)$$

welche für $F = nf$ und $\Sigma(v) = 2\pi$

$$r_1 = \frac{nf\ cos\,\beta}{2\,r\,\pi\ sin\ \alpha}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (15)$$

liefert. Da $sin\,\alpha$ und $cos\,\beta$ constante Größen sind, so folgern wir aus Gl. (14) den Satz:

9. Die Hauptaxe des Instruments braucht weder mit der Bewegungsrichtung des unteren Schlittens parallel zu sein, noch durch den Mittelpunkt der Drehscheibe zu gehen, wenn der Halbmesser des Drehrädchens darnach eingerichtet wird.

Wollte man aus Gl. (15) den für die beiden Fälle Nr. 6 und Nr. 7 nöthigen Halbmesser r_1 des Rädchens genau berechnen, so müßten auch die Winkel α und β sehr genau bekannt sein; da aber deren scharfe Bestimmung sehr umständlich ist, so geht der Mechaniker sicherer, wenn er diesen Halbmesser nur an-

nähernd durch Rechnung bestimmt, ihn anfangs etwas größer macht als er sein muß und später durch Abdrehen des Rädchens so lange verkleinert, bis der Apparat die richtigen Flächen angibt.

Es ist weiter oben bemerkt worden, daß ein- und dasselbe Instrument für verschiedene Flächenmaße gebraucht werden kann, wenn man nur das Drehrädchen darnach abändert, d. h. eines von entsprechendem Durchmesser statt eines anderen an die Hauptaxe ansteckt. Da aber der Abstand des Rädchens *R* von der Axe *dd'*, um welche die Hauptaxe gehoben oder gesenkt werden kann, stets gleich bleibt, so folgt, daß für Rädchen von verschiedenen Durchmessern die Hauptaxe stets eine andere Lage gegen die Ebene der Drehscheibe erhält: daß sie somit dieser Ebene bald parallel ist, bald wieder nicht. Es läßt sich indessen leicht einsehen:

10. daß die Hauptaxe mit der Drehscheibe nicht parallel zu laufen braucht, sondern einen kleinen Winkel mit ihr bilden darf;

denn der Zweck der Hauptaxe ist bloß der, die Drehung des Rädchens *R* auf den Zählapparat überzutragen, und diese Uebertragung ändert sich nicht durch die Stellung jener Axe gegen die Drehscheibe, so lange der Neigungswinkel nicht so auffallend ist, daß das Drehrädchen die Scheibe nach einem Kreis von anderem Durchmesser berührt, als der ist, welcher der bestimmten Flächeneinheit zugehört, nach der die Angabe des Instruments erfolgen soll.

c. Gebrauch, Prüfung und Berichtigung.

Der Gebrauch des fehlerfreien Instruments ist sehr einfach und ergiebt sich aus den vorhergehenden Erörterungen von selbst. Steht nämlich der Planimeter auf einer festen ebenen Unterlage, einem Tische oder Zeichenbrette, so bringe man ihn zunächst durch die Fußschrauben in eine nahehin wagrechte Lage, was man daran erkennt, daß jeder der beiden Schlitten an der Stelle ruhig verharrt, in die man ihn schiebt. Hierauf lege man die auszumessende ebene Figur so unter den Führer, wie die Regel Nro. 7 vorschreibt, bezeichne mit Beobachtung der Regel Nro. 4 einen Punkt des Umfangs als Anfangspunkt der Bewegung, hebe das

Rädchen *R* durch Vorwärtsdrehen des Schräubchens *e* ein wenig von der Scheibe, stelle durch Drehung der Hauptaxe alle Zeiger auf Null und bringe den Führer so auf den Anfangspunkt, daß er von dem Mittelpunkte des Kreises im Glase *M* gedeckt wird. Nachdem dieses geschehen, lasse man mit Hilfe des Schräubchens *e* das Rädchen *R* auf die Drehscheibe herabsinken, so daß sich beide berühren; führe den genannten Kreis auf der auszumessenden Figur rechtsläufig bis zum Ausgangspunkte herum, und lese schließlich an dem Zeiger z' die Tausende, an z'' die Hunderte und an Z die weniger als Hundert betragende Anzahl von Einheiten ab, deren Zusammenfügung die gesuchte Fläche gibt. Sollten die äußersten Punkte der auszumessenden Figur weiter auseinander liegen als die größten Ausweichungen der Schlitten nach den ihnen angewiesenen Richtungen (16 Centimeter nach der Richtung des Drahts und 8 Centimeter senkrecht darauf), so theile man dieselbe durch eine beliebige gerade oder krumme Linie so ab, daß das Umfahren jedes Theiles möglich wird und bestimme jeden für sich nach der vorstehenden Anleitung.

Die Prüfung des Planimeters würde sehr umständlich sein, wenn alle wesentlichen Theile desselben einzeln untersucht werden müßten, ob sie ihre Bestimmung mit der erforderlichen Genauigkeit erfüllen. Diese Einzel-Untersuchung ist jedoch nicht nöthig, sobald man sich durch ein summarisches Verfahren überzeugt hat, daß der Flächeninhalt von genau berechneten Versuchsfiguren richtig angegeben wird. Am besten sind hiezu regelmäßige Figuren, wie Kreise, Quadrate, gleichseitige Dreiecke u. s. w. geeignet, weil sie sich am schärfsten zeichnen und berechnen lassen. Man kann sie entweder auf angespanntem Papier fein ausziehen oder in ebene Metallplatten graviren. Ihre Abmessungen müssen mit der größten Genauigkeit bestimmt sein. Es ist gut, wenn man zu diesen Probefiguren auch solche nimmt, welche, wie z. B. Rechtecke, erfordern, daß die beiden Schlitten ihre größtmöglichen Bewegungen machen, weil nur dann, wenn auch der Inhalt dieser Flächen richtig angegeben wird, angenommen werden darf, daß alle Theile des Apparats ihre Schuldigkeit thun.

Bei diesen Versuchen kann sich zeigen, daß alle ablesenen Flächeninhalte gegen die berechneten nur um äußerst wenig (etwa $1/_{1000}$) bald zu groß, bald zu klein sind: in diesem Falle ist das Instrument in Ordnung. Oder es zeigt sich, daß alle Inhalte um etwas zu groß gefunden werden; dann ist auch das Rädchen etwas zu groß und deßhalb sein Durchmesser um eine Kleinigkeit zu verringern. Oder man findet alle Flächen etwas zu klein; in diesem Falle ist auch der Durchmesser des Drehrädchens etwas zu klein. Da derselbe aber nicht vergrößert werden kann, so ist oft damit zu helfen, daß man den Draht etwas dicker nimmt, denn dadurch wird der Halbmesser r der Trommel größer und es kann so das Produkt rr_1 auf die erforderliche constante Größe gebracht werden, so wie im vorhergehenden Falle durch Anwendung eines dünneren Drahtes das Abdrehen des Rädchens auch oft erspart wird. Oder endlich es zeigt sich, daß die Abweichungen von dem wahren Flächeninhalte bald positiv bald negativ, jedenfalls aber größer sind als sie seyn dürfen; dann kann der Fehler herrühren:

a) von der Ungeschicklichkeit oder Unachtsamkeit des Messenden; oder

b) von der Unebenheit der Drehscheibe; oder

c) von der gleitenden Bewegung zwischen der Rolle und Scheibe; oder endlich

d) von der unregelmäßigen Bewegung der Schlitten.

Zu a. Derjenige, welcher mit dem Planimeter die Fläche einer Figur richtig bestimmen will, muß nicht nur darauf sehen, daß er das Instrument richtig stellt und den Umfang genau umfährt, sondern auch darauf, daß dieses Umfahren mit möglichst gleicher Geschwindigkeit der Bewegung des Führers und unveränderter Lage des Glases M gegen die Ebene der Figur geschieht. Denn nach den Versuchen von Stampfer erzeugen schnelle Bewegungen, abgesehen von den kleinen Abweichungen in der Umschreibung, auch dadurch Fehler, daß das Drehrädchen eine gewisse Schwungkraft und hierdurch ein Bestreben zum Vorlaufen erlangt; und wenn das Glas M aus irgend einem Grunde während des

Umfahrens seine Lage gegen die Ebene der Figur ändert, so entsteht eine schädliche Parallaxe, die eben so wirkt, als wenn der Umfang nicht genau umschrieben wird.

Zu b. Die Drehscheibe sollte streng genommen auf ihrer Oberfläche eine vollkommene Ebene sein; da sie aber auch gleichzeitig eine hinreichende Reibung zwischen sich und der Drehrolle hervorbringen soll, so darf diese Ebene nicht metallisch sein, sondern muß mit Papier überzogen werden. Dieses ist zwar nie ganz eben, auch wenn es sehr dünn, fest und gleichförmig aufgespannt ist; jedoch für den vorliegenden Zweck eben genug, wenn ein genaues Lineal seine Oberfläche nach allen Richtungen für das bloße Auge vollständig deckt. Die gefährlichsten Stellen befinden sich stets am Rande der Scheibe, wo sich das Papier manchmal etwas ablöst. Solche Ablösungen müssen sogleich ausgebessert werden.

Zu c. Da die Theorie des Planimeters fordert, daß von der Drehrolle ein Bogen abgewickelt werde, welche der Berührungscurve auf der Drehscheibe genau gleich ist, so ist klar, daß eine Verschiedenheit in der Länge dieser Bögen einen Fehler in der Flächenangabe erzeugt. Ein Unterschied dieser Längen ergiebt sich aber, sobald die Rolle wegen zu großen Gewichts oder zu schwerfälliger Bewegung ihrer Axe, oder auch wegen zu geringer Reibung oder gar wegen Mangels an Berührung die Drehscheibe unter sich weggleiten läßt, ohne sich zu drehen. Daher muß die Hauptaxe leicht sein und sich fast ohne Reibung bewegen;*) der Druck der Rolle auf die Scheibe muß durch das Gegengewicht *W* vermehrt und vermindert werden können, um deren Reibung größer oder kleiner zu machen; und vor dem Umfahren einer Figur ist das Schräubchen *e* jedesmal weit genug zurück zu drehen, damit die Rolle vollständig auf der Scheibe ruht.

Zu d. Wenn auch die beiden Schlitten sich nicht senkrecht auf einander zu bewegen brauchen, so muß der Theorie gemäß doch gefordert werden, daß sie sich unter einem unveränderlichen Winkel oder parallel zu ihren ursprünglichen Lagen verschieben

*) Durch die Hansen'sche Einrichtung der Hauptaxe (siehe Abth. e. S. 38) wird diese Forderung am besten erfüllt.

lassen. Da jedoch die Nuthen, in denen die Schlitten laufen, ihre Lage nicht ändern können, so kommt es nur mehr darauf an, daß die Bewegungen geradlinig sind. Ob dieses der Fall ist, kann man mit einem kleinen Fernrohre, das ein Fadenkreuz hat, untersuchen, wenn man dasselbe nach einander mit beiden Schlitten in der Weise fest verbindet, daß seine Axe den Bewegungsrichtungen dem Augenmaße nach parallel läuft. Würde die Axe des Fernrohrs diesen Richtungen genau parallel sein, so müßte ein in größerer Entfernung anvisirter Punkt während der Bewegung des Schlittens ununterbrochen gedeckt werden; da man aber diesen Parallelismus nicht immer voraussetzen kann, so lege man in einer für das Fernrohr passenden Entfernung eine gleichgetheilte Latte (*A B*, Fig. 16) wagrecht und lese die Zahlen z, z', z'' ab, welche das Fadenkreuz in verschiedenen Punkten a, a', a'' des Schlittenwegs deckt. Findet man, daß die Differenzen $z-z'$, $z'-z''$ u. s. w. sich genau wie die am Instrumente leicht zu messenden Entfernungen aa', $a'a''$ u. s. w. verhalten, so bewegt sich der Schlitten offenbar in gerader Linie. Einen merkbaren Fehler in dieser Beziehung wird übrigens äußerst selten ein Instrument haben. Die gefährlichsten Fehlerquellen bleiben immer die mit b und c bezeichneten, auf welche daher auch die Untersuchung vorzugsweise gerichtet werden muß.

d. Genauigkeit.

Um die Genauigkeit unseres Planimeters zu prüfen, habe ich auf eine eben geschliffene Messingplatte einige Figuren so fein als möglich graviren lassen, aus den auf's Genaueste gemessenen Dimensionen ihren Flächeninhalt berechnet, und hierauf diesen Inhalt durch das Instrument bestimmt. Folgende Beobachtungen werden den Leser in den Stand setzen, sich sein eigenes Urtheil über die Genauigkeit des Planimeters zu bilden. Die Zeiten, welche neben den Versuchs-Ergebnissen angemerkt sind, waren nöthig, um die Platte unter das Instrument zu legen, den Führungskreis auf den Anfangspunkt, die Zeiger auf Null zu stellen, die Figur 10 mal zu umfahren und 10 Ablesungen aufzuschreiben.

Nr. 1. Kreis.

Durchmesser = 22,05 bayerischen Dezimallinien;
Flächeninhalt = 381,86 Dezimal-Quadratlinien.

Beob.	Zeit.	Ablesung.	Fläche.	Unterschied
	8^h 48′	0		
1.		382,0	382,0	— 0,2
2.		764,1	382,1	— 0,1
3.		1146,4	382,3	+ 0,1
4.		1528,5	382,1	— 0,1
5.		1910,7	382,2	0
6.		2293,0	382,3	+ 0,1
7.		2675,3	382,3	+ 0,1
8.		3057,6	382,3	+ 0,1
9.		3440,0	382,4	+ 0,2
10.	9^h 3′	3822,0	382,0	— 0,2

Resultate:

Zeit zu einer Beobachtung durchschnittlich = 1,5 Minuten;
Mittlere Fläche aus 10 Beobachtungen = 382,2 □ Linien;
Abweichung dieser Fläche v. d. berechneten = + 0,36 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 1060;
Größte Abweichung der einzelnen Beobachtungen von dem durch Beobachtung gefundenen Mittel = 0,2 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 1911.

Nr. 2. Kreis.

Durchmesser = 13,95 bayerischen Dezimallinien;
Flächeninhalt = 152,93 Dezimal-Quadratlinien.

Beob.	Zeit.	Ablesung.	Fläche.	Unterschied
	9ʰ 52′	0		
1		153,0	153,0	— 0,1
2		306,3	153,3	+ 0,2
3		459,6	153,3	+ 0,2
4		612,8	153,2	+ 0,1
5		766,0	153,2	+ 0,1
6		919,0	153,0	— 0,1
7		1072,1	153,1	0
8		1225,1	153,0	— 0,1
9		1378,0	152,9	— 0,2
10	10ʰ 4′	1531,0	153,0	— 0,1

Resultate.

Zeit zu einer Beobachtung im Durchschnitt = 1,2 Minuten;
Mittlere Fläche aus 10 Beobachtungen = 153,1 □ Linien;
Abweichg. dieser Fläche v. d. berechneten = + 0,13 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 1169;
Größte Abweichung der einzelnen Beob. = 0,2 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 765.

Nr. 3. Quadrat.

Seite = 22,03 Dez.-Linien; Fläche = 485,32 □ Linien.

Beob.	Zeit.	Ablesung.	Fläche.	Unterschied
	11ʰ 24′	0		
1		485,6	485,6	— 0,1
2		972,0	485,6	— 0,1
3		1457,9	485,9	+ 0,2
4		1943,4	485,5	— 0,2
5		2429,2	485,8	+ 0,1
6		2915,0	485,8	+ 0,1
7		3400,5	485,5	— 0,2
8		3886,0	485,5	— 0,2
9		4371,5	485,5	— 0,2
10	11ʰ 37′	4857,1	485,6	— 0,1

Resultate:

Zeit zu einer Beobachtung im Durchschnitt = 1,4 Minuten;
Mittlere Flächen aus 10 Beobachtungen = 485,7 □ Linien;
Abweichung dieser Fläche v. d. berechneten = + 0,38 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 1277;
Größte Abweichung der einzelnen Beob. = 0,2 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 2428.

Nr. 4. Sichelförmiger Kreisausschnitt.

Die Form der Fläche ergibt sich aus Fig. 20; ihr Inhalt ist gleich dem Unterschied der Kreise Nr. 1 und Nr. 2 = 381,86 — 152,93 = 228,93 □ Linien.

Beob.	Zeit.	Ablesung.	Fläche.	Unterschied
	10^h 13′	0.		
1		229,0	229,0	0
2		458,0	229,0	0
3		686,9	228,9	— 0,1
4		915,8	228,9	— 0,1
5		1145,0	229,2	+ 0,2
6		1374,1	229,1	+ 0,1
7		1602,9	228,8	— 0,2
8		1832,0	229,1	+ 0,1
9		2061,2	229,2	+ 0,2
10	10^h 36′	2290,0	228,8	— 0,2

Resultate:

Zeit zu einer Beobachtung im Durchschnitt = 2,3 Minuten;
Mittlere Fläche aus 10 Beobachtungen = 229 □ Linien;
Abweichung dieser Fläche v. d. berechneten = + 0,09 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 2544;
Größte Abweichung der einzelnen Beob. = 0,2 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 1145.

Nr. 5. Unregelmäßiges Eilfeck.

Aus den Coordinaten berechnete Fläche = 655,7 □ Linien.

Beob.	Zeit.	Ablesung.	Fläche.	Unterschied
	11ʰ 58′	0		
1		656,6	656,6	+ 0,2
2		1313,0	656,4	0
3		1969,3	656,2	— 0,2
4		2625,2	656,4	0
5		3282,0	656,4	0
6		3938,1	656,1	— 0,3
7		4594,2	656,1	— 0,3
8		5250,8	656,6	+ 0,2
9		5907,5	656,7	+ 0,3
10	12ʰ 23′	6564,0	656,5	+ 0,1

Resultate.

Zeit zu einer Beobachtung im Durchschnitt = 2,5 Minuten;
Mittlere Fläche aus 10 Beobachtungen = 656,4 □ Linien;
Abweichung dieser Fläche v. d. berechneten = + 0,7 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichungen zur ganzen Fläche = 1 : 938;
Größte Abweichung der einzelnen Beob. = 0,3 □ Linien;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 2188.

Nr. 6. Rechtwinkeliges Dreieck.

Grundlinie = 10,0‴; Höhe = 9,99‴; Fläche = 49,95 □ Linien.

Beob.	Zeit.	Ablesung.	Fläche.	Unterschied
	4ʰ 10′	0		
1		50,0	50,0	0
2		99,9	49,9	— 0,1
3		150,0	50,1	+ 0,1
4		200,0	50,0	0
5		250,0	50,0	0
6		299,9	49,9	— 0,1
7		349,8	49,9	— 0,1
8		399,9	50,1	+ 0,1
9		450,0	50,1	+ 0,1
10	4ʰ 22′	500,0	50,0	0

Resultate:

Zeit zu einer Beobachtung im Durchschnitt = 1,2 Minuten;
Mittlere Fläche aus 10 Beobachtungen = 50 □ Linien;
Abweichung dieser Fläche v. d. berechneten = + 0,05 □ Linie;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 1000;
Größte Abweichung der einzelnen Beob. = 0,1 □ Linie;
Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 500.

Vergleicht man die aus den 6 Versuchsreihen gezogenen Einzel-Resultate unter sich, so ergibt sich folgendes allgemeine:

Die Genauigkeit ist bei kleinen Flächen etwas geringer als bei größeren, und man kann Flächen von mehr als 2 Quadratzoll Inhalt auf $\frac{1}{1000}$, zwischen 2 und 1 Quadratzoll auf $\frac{1}{700}$, und unter 1 Quadratzoll auf $\frac{1}{500}$ ihrer Fläche richtig bestimmen.

Da alle aus je 10 Beobachtungen hervorgegangenen mittleren Flächen etwas größer sind als die berechneten, so ist anzunehmen, daß das Drehrädchen um eine Kleinigkeit zu groß ist. Vermindert man die gemessenen Flächen um $\frac{1}{1000}$ ihres Inhalts und stellt sie mit den berechneten zusammen, so erhält man folgende

Tabelle
zur Vergleichung der berechneten und durch 10 malige Wiederholungen gemessenen Flächen Nr. 1 bis 6.

Fläche Nr.	Gemessene Fläche *a*.	Reduzirte Fläche *c*.	Berechnete Fläche *b*.	Unterschied der Flächen *b* und *c*.	Verhältniß des Unterschieds zur ganz. Fläche.
1	382,2	381,82	381,86	+ 0,04	1 : 9545
2	153,1	152,95	152,93	— 0,02	1 : 7647
3	485,7	485,22	485,32	+ 0,10	1 : 4226
4	229,0	228,93	228,77	— 0,16	1 : 1430
5	656,4	655,75	655,70	— 0,05	1 : 13115
6	50,1	49,95	49,95	0	1 : ∞

e. Verbesserungen am Hansen'schen Planimeter.

Herr Hofrath Hansen hat den Wetli'schen Planimeter mehrfach abgeändert, und es können diese Veränderungen meines Erachtens alle als Verbesserungen der Wetlischen Construktion betrachtet werden. Es sey erlaubt, folgende davon anzuführen.

Am Wetlischen Planimeter laufen die beiden Schlitten jeder mittels dreier Rollen auf Schienen und in jede Rolle ist eine der Schiene entsprechende Nuthe eingedreht; am Ausfeld'schen Instrumente laufen dagegen nur je zwei Rollen in einer Nuthe und je die dritte läuft flach aus. Diese letztere Einrichtung beseitigt den Uebelstand der ersteren: daß, wenn die Schienen und die Rollen nicht vollkommen parallel stehen, die Führung der Schlitten und hierdurch der ganze Gang des Instruments gestört wird.

Die Hauptaxe des Uhrwerks am Wetlischen Planimeter hat konische, am Ausfeld'schen aber cylindrische Zapfen, welche sich in einem sogenannten *y* bewegen. Dadurch ist die Reibung so gering wie möglich gemacht und jeder Spielraum der in einem cylindrischen Zapfenloche immer vorhanden ist und der sich mit der Abnutzung vergrößert, vermieden. Da von der Hauptaxe des Planimeters gefordert werden muß, daß sie sich, ohne dem Rädchen *R* Spielraum zu gestatten, mit der größten Leichtigkeit bewege, und dieses durch die angezeigte Verbesserung der Axe und ihrer Lage geschieht, so glaube ich diese Verbesserung hier besonders hervorheben zu müssen.

Das Hauptzifferblatt des Wetlischen Planimeters ist in 1000 Theile getheilt und das Nebenzifferblatt zählt bloß die ganzen Umdrehungen der Hauptaxe; am Ausfeldschen Planimeter befinden sich dagegen zwei Nebenzifferblätter, wovon das eine Tausende, das andere Hunderte von Flächeneinheiten angibt, und ein Hauptzifferblatt, welches nur in 100 Theile getheilt zu werden braucht, um eben so genaue Ablesungen als das tausendtheilige zu geben. Die Ablesung ist somit erleichtert.

Das Umfahren der Figur geschieht nach Wetli mit einem Stifte, der den Umfang berührt, nach Hansen aber durch eine Lupe mit kleinem Kreise, der keine Berührung fordert. Es unterliegt keinem Zweifel, daß letztere Einrichtung besser ist als die erstere; denn abgesehen davon, daß man die zu messende Figur nicht zu streifen braucht, kann man sie auch genauer umfahren, weil sie vergrößert und an keiner Stelle verdeckt wird. Von der größeren Genauigkeit der Lupenvorrichtung habe ich mich durch Versuche überzeugt, indem ich ein und dieselbe Figur unter ganz gleichen Umständen bald mit jener Einrichtung bald mit einem senkrechten Stifte, den ich statt dieser einsetzte, umfuhr.

Die Lupe kann auch Fehler erzeugen. Wenn sie nemlich nicht tief genug auf die Ebene der Figur herabgelassen und das Auge über dem zweiten Vergrößerungsglase während des Umfahrens nach verschiedenen Seiten bewegt wird, so tritt das Bild der Umfangslinie zur Seite des Kreismittelpunktes, und da man diesen dem Bilde fortwährend nachschiebt, so wird in Folge jener optischen Wirkung eine falsche Linie umschrieben, wodurch nothwendig auch die Fläche eine andere wird. Dieser Fehler ist aber sehr leicht zu vermeiden, wenn man entweder mittels der Schräubchen an der Führungsvorrichtung oder durch die Stellschrauben des Fußgestelles das kleine Glas so weit herabläßt, daß es die Ebene der Figur fast berührt, und wenn man überdieß stets nach einerlei Richtung auf den kleinen Kreis sieht.

4. Verschiedene Anwendungen der neueren Planimeter.

Es wird nicht überflüssig erscheinen, aus der großen Anzahl von Fällen, in denen die beschriebenen Planimeter mit großem Vortheile angewendet werden können, die wichtigeren und manche unbeachtete hervorzuheben, sowie die Ergebnisse der Versuche anzuführen, welche ich in Bezug auf Zeitersparniß im Vergleich zur gewöhnlichen Berechnung angestellt habe und auch von anderen ausführen ließ.

Am brauchbarsten ist der Planimeter ohne Zweifel für die Katastervermessungen, da er erstens eine Genauigkeit gewährt, welche bei Anwendung des Zirkels und Maßstabs bei eckigen Figuren nur schwer und bei krummlinigen (mit Ausnahme des Kreises) gar nie erreicht wird; zweitens so zuverlässig ist, daß fast jeder Gedanke an einen Fehler ausgeschlossen bleibt, indem jede Fläche unmittelbar abgelesen werden kann; drittens wenigstens 80 Prozent der auf die gewöhnliche Berechnung zu verwendenden Zeit erspart; und endlich viertens die Originalpläne, wo sie zur Flächenbestimmung benützt werden, vollständig schont, indem sie weder beschmutzt, noch mit dem Zirkel zerstochen werden. Bei der Revision der Flächenberechnungen treten diese Vortheile um so glänzender hervor, je mehr Figuren zu einer einzigen zusammengefaßt werden, deren Flächeninhalt der Summe der Flächentheile gleich sein muß. Die Wahrheit dieser Behauptungen ergiebt sich größtentheils schon aus den vorhergehenden Beschreibungen und Versuchen; sie wird aber durch folgende Erfahrungsresultate noch weiter bestätigt. Zur gewöhnlichen Berechnung der einzelnen Parzellen in Fig. 17 war eine Zeit von 4 Stunden und 33 Minuten erforderlich, der Apparat gab sie in 20 Minuten. Der Flächeninhalt der ganzen Figur wurde in 2 Stunden und 40 Minuten berechnet und in 3 Minuten mit dem Instrumente gemessen. Die Summe der berechneten Flächentheile wich von der berechneten Fläche der ganzen Figur um 0,227 Prozent oder $\frac{1}{440}$ des Gesammtinhalts ab, während der Unterschied der Summe der gemessenen Theile und der in Einem gemessenen Fläche nur 0,047 Prozente oder $\frac{1}{2128}$ des ganzen Inhalts betrug. Die Einzelnheiten zeigt folgende Tabelle:

Tabelle über die Berechnung der Figur 17.

Parzelle Nr.	Berechnete Fläche. Quadratlinien.		Gemessene Fläche Quadratlinien.		Zeit d. Rechnung. Minuten.		Zeit der Messung. Minuten.		Bemerkungen.
	1. Rechn.	2. Rechn.	1. Messung	2. Messung	1 Rechn.	2 Rechn.	1 Messg.	2. Mess.	
1	102,64	102,58	102,5	102,6	51	45	1,9	2,0	Die Horizontalreihe, vor welcher „Gesammtfläche“ steht, gibt die Resultate der Berechnung und Messung der Figur 17 überhaupt, ohne Rücksicht auf die einzelnen Parzellen. Bei der Rechnung wurde dieselbe so zerlegt, wie es für die Bestimmung des Inhalts am förderlichsten erschien, und bei der Messung wurde die Umfangslinie *abcdefga* ohne Unterbrechung umfahren.
2	96,20	96,19	95,9	96,1	35	37	1,8	1,7	
3	55,70	55,90	55,8	55,7	25	23	1,6	1,7	
4	44,99	44,88	44,9	45,0	20	18	1,7	1,6	
5	17,92	18,16	17,6	17,8	24	21	1,4	1,3	
6	33,24	33,14	33,2	33,2	17	19	1,5	1,4	
7	64,71	64,93	65,0	64,9	14	15	1,7	1,6	
8	39,84	40,28	40,5	40,6	23	19	1,6	1,5	
9	36,99	36,74	36,8	36,8	20	20	1,5	1,6	
10	44,65	45,47	45,5	45,4	18	19	1,7	1,6	
11	55,10	55,26	54,9	55,0	19	16	1,6	1,7	
12	45,82	46,29	45,6	45,7	14	15	1,6	1,5	
Summe:	637,80	639,82	638,2	638,8	280	267	19,6	19,2	
Mittel	638,81		638,5		273		19,4		
Gesammt-Fläche	638,01	636,71	638,0	638,4	171	149	3,2	3,0	
Mittel	637,36		638,2		160		3,1		

Den **Bauingenieuren** gewährt der Planimeter fast eben so viele Vortheile als den Geometern der Steuerkataster, wenn sie zumal mit dem Entwurfe und der Ausführung größerer Erdwerke, wie Eisenbahnen, Landstrassen, Kanäle u. dgl. betraut sind. Denn die Berechnung der zu fördernden Erdmassen, welche sich stets auf die Kenntniß von Grundflächen stützt, kann nach Umständen in dem dritten oder vierten Theile der Zeit ausgeführt werden. Wo somit jetzt drei oder vier Baupraktikanten Erdmassen berechnen, reicht später einer hin, und wo sich jetzt nur einer das ganze Jahr hindurch damit beschäftigt, kann er später acht bis neun Monate einer anderen nützlichen Thätigkeit widmen. Diese Behauptung ist nicht etwa auf nur eine einzige Probe gestützt, sondern auf mehrere, die ich theils selbst gemacht habe, theils von gewandten Ingenieurelevèn machen ließ. Die Versuche bestanden darin, daß für eine größere Strecke einer Landstrasse oder Eisenbahn, in welcher einfache und zusammengesetzte Profile vorkamen, die Erdberechnung auf gewöhnliche Weise mit Hilfe des prismatischen Maßstabs und ausserdem mit Anwendung des Planimeters vorgenommen und die Zeit beobachtet wurde, welche in beiden Fällen nöthig war. Daß der Zeitgewinn hier nicht mehr so groß ist wie in dem eben besprochenen ersten Falle, erklärt sich leicht aus dem Umstande, daß bei den Erdberechnungen außer den Flächen auch die räumlichen Inhalte zu bestimmen sind, welche für beide Methoden **gleiche** Zeiten in Anspruch nehmen.

Auf eine in den Bereich der **Naturwissenschaften** gehörige Anwendung hat schon Stampfer aufmerksam gemacht. Wenn nämlich physikalische Erscheinungen, wie Luftdruck, Temperatur, Stärke und Richtung des Windes ꝛc. ꝛc. durch besondere Vorrichtungen (Autographen) aufgezeichnet werden, so stellen diese Apparate den Gang jener Erscheinungen durch eine krumme Linie dar, deren Abscissen der Zeit und deren Ordinaten den Wirkungen der den Erscheinungen zu Grunde liegenden Kräfte proportional sind. Will man nun aus einer solchen Aufzeichnung z. B. den mittleren Luftdruck für einen gegebenen Zeitabschnitt finden, so ist derselbe bekanntlich gleich dem Quotienten aus dem Abscissenunterschiede,

welcher jenen Zeitabschnitt darstellt, in die Fläche, über diesem Unterschiede, welche durch senkrechte Ordinaten begrenzt wird. Diese Fläche gibt aber der Planimeter sehr schnell und jedenfalls genauer als die Aufzeichnung selbst ist; und da die Division mit dem Abscissenunterschiede in die gemessene Fläche nur einen unmerklichen Zeittheil in Anspruch nimmt, so ist die Zeit zur Bestimmung des Mittels fast allein auf die des Umfahrens der Figur beschränkt.

Diesen Anwendungen füge ich noch einige ähnliche aus dem Gebiete der Technik bei.

Man stellt die verschiedenen Wasserstände eines Flusses während eines Jahrs nach den angestellten Pegelbeobachtungen graphisch so dar, daß diese Wasserstände als Ordinaten und die Zeiten als Abscissen erscheinen. Die Verbindungslinie der oberen Endpunkte der Ordinaten gibt eine Curve, wie in Fig. 18, welche das allmählige Steigen und Fallen des Wasserspiegels im Zusammenhange darstellt. Will man nun den mittleren Wasserstand im ganzen Jahre wissen, so muß die ganze Fläche $ABCD....Z$ durch die Abscisse AZ dividirt werden; soll aber beispielsweise nur der mittlere Wasserstand vom 1. Juni bis 30. September angegeben werden, so ist die Fläche $VEFGW$ durch den Abscissenunterschied VW, welcher dem genannten Zeitraum entspricht, zu theilen. Dieses Verfahren, welches mittels des Planimeters auf die schnellste Weise ausgeführt werden kann, liefert immer richtige Resultate, während das arithmetische Mittel der Ordinaten nur dann zuverlässig ist, wenn diese Ordinaten sehr nahe stehen und gleiche Entfernungen haben.

Es gibt bekanntlich verschiedene Vorrichtungen, welche dazu dienen, die Spannung des Dampfs in den Dampfmaschinen zu messen. Die meisten geben nur die Spannung im Kessel an, welche für die Dauer der Messung als unveränderlich angesehen werden kann; einige messen aber auch die veränderliche Dampfspannung im Arbeitscylinder. Zu den besten Werkzeugen der letzten Art gehört der Watt'sche Spannungsmesser, welcher den in jedem Augenblicke stattfindenden Druck des Dampfes auf einer ausgespannten Papierfläche graphisch darstellt. Fig. 19 gibt das Bild

einer solchen Aufzeichnung, welche sich auf einen Hin- und Hergang des Kolbens in einer Dampfmaschine ohne Absperrung bezieht. Die höchste Stelle entspricht der stärksten, die niedrigste der kleinsten Spannung des Dampfes; die Länge PQ stellt die halbe Zeit der ganzen Kolbenbewegung vor, oder die ganze Zeit für die halbe Bewegung des Kolbens. Diese Linie PQ steht auf der Richtung der Kolbenbewegung senkrecht und ist in einer Höhe gezogen, welche der Spannung Null entspricht und vom Apparat selbst angedeutet wird. Will man nun aus der Figur 19 die mittlere wirksame Spannung des Dampfes im Arbeitscylinder während des ganzen Kolbengangs finden, so braucht man nur die Fläche $ABCDE$ zu bestimmen und durch PQ zu dividiren: der Quotient gibt dann, was man sucht. Da aber die Fläche $ABCDE$ schwierig zu berechnen ist, so hat man sich schon damit geholfen, sie auszuschneiden und zu wägen, um mit Hilfe ihres Gewichts auf den Flächeninhalt zu schliessen. Begreiflicherweise setzt aber ein solches Verfahren gleichmäßig dickes Papier, eine feine Wage und ein genaues Ausschneiden der Figur voraus; drei Bedingungen, welche theilweise nur schwer zu erfüllen sind. Dagegen bestimmt der Planimeter jede solche Fläche in zwei Minuten mit größter Genauigkeit, ohne irgend eine Unbequemlichkeit des Messenden zu veranlassen.

Anhang.

Nach Vollendung des Satzes dieser Abhandlung hatte Herr Hofrath Hansen die Güte, mir einige sehr schätzenswerthe Bemerkungen über die Theorie und den Gebrauch des Planimeters zukommen zu lassen, deren Mittheilung hier um so weniger übergangen werden darf, als dadurch einerseits die Einsicht in das Wesen des Planimeters denjenigen erleichtert wird, welche mit der von mir gebrauchten höheren Rechnungsart nicht vertraut sind, und andererseits der Werth des in Rede stehenden merkwürdigen Instruments für Katastermessungen eine Erweiterung erhält.

Eine jener Bemerkung betrifft einen elementaren Beweis des Satzes, daß die Fläche irgend einer gegebenen Figur durch den

Planimeter bestimmt wird, wenn man deren Umfangslinie mit dem Führer des Instruments umfährt. Dieser Beweis setzt aber voraus, daß man sich erst davon überzeugt habe:

> daß der Planimeter die Fläche eines Parallelogrammes, dessen Seiten den Bewegungen der beiden Schlitten parallel sind, gibt, wenn man dasselbe rechtsläufig umfährt;

und diese Ueberzeugung erlangt man durch folgende Betrachtung.

Stellt $abcd$ (Fig. 21) ein Parallelogramm vor, dessen Seiten den Schlittenbewegungen parallel sind; bezeichnet

- x die Länge der dem Draht parallelen Seite ab,
- y die der Bewegung des unteren Schlittens parallele Seite ad,
- α den Winkel der Seiten ab, ad und der Bewegungsrichtungen,
- r_0 den Abstand des Berührungspunktes des Rädchens R vom Mittelpunkte der Drehscheibe, wenn der Führer auf a steht;

und haben r, r_1, φ und ν ihre frühere Bedeutung (S. 12): so wird, wenn der Führer von a aus in b angekommen ist, $x = r\varphi$, und da sich während dieser Bewegung der Abstand r_0 nicht ändert, $r_0\varphi = r_1\nu$, oder, was dasselbe ist,

$$r_0 x = r r_1 \nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

sein. Geht der Führer von b nach c, so erfolgt keine Abwickelung des Drahtes, folglich auch keine Drehung der beiden Scheiben; aber es ändert sich der Abstand r_0 in $r_0 \pm y$ um. In c ist die Ablesung der in b gleich. Bewegt man jetzt den Führer von c nach d, so entsteht eine der vorigen entgegengesetzte aber gleiche Drehung der großen Scheibe, welche durch $-x = -r\varphi$ ausgedrückt ist; und auf dem Rädchen R oder der kleinen Scheibe wickelt sich ein Bogen von der Länge $(r_0 \pm y)\varphi = r_1\nu_1$ ab, welcher der Lage nach dem vorigen $r_1\nu$ entgegengesetzt ist. Es ergibt sich somit die zweite Gleichung:

$$-(r_0 \pm y)x = -rr_1\nu_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Fährt man schließlich von d nach a, so erfolgt wie von b nach c keine Drehung, der Abstand $r_0 \pm y$ wird jedoch wie im Anfange $= r_0$. Die Ablesung in a ist der in d gleich und entspricht dem Bogenunterschiede $\nu - \nu_1$. Dieser Unterschied zeigt aber die Fläche des Parallelogrammes $abcd$ an; denn zieht man die Gleichung (β) von der (γ) ab, so kommt

$$\pm\, yx = rr_1\,(\nu - \nu_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

und wenn man diese Gleichung mit $sin\,\alpha$ multiplizirt,

$$\pm\, yx\; sin\,\alpha = rr_1\,(\nu - \nu_1)\; sin\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Es ist aber $yx\; sin\,\alpha$ der Flächenraum von $abcd$ und $rr_1\; sin\,\alpha$ eine konstante Größe; folglich jener Flächenraum der algebraischen Summe der Drehungen ν und ν_1 des Rädchens R proportional, was zu beweisen war.

Sind die Bewegungen der beiden Schlitten rechtwinkelig, folglich der Winkel $\alpha = 90^0$ und $sin\,\alpha = 1$, so nimmt die letzte Gleichung den Ausdruck der vorletzten (δ) an, und yx stellt jetzt ein Rechteck vor. Die senkrechte Verschiebung der beiden Schlitten auf einander als die vortheilhaftere vorausgesetzt, betrachtet nun Herr Hofrath Hansen zwei aneinander gelegte ungleiche Rechtecke, wie in Fig. 22. Wenn man von a ausgehend, und über b, c, d fortschreitend, jedes derselben umfährt, so gibt der Planimeter die Summe der beiden Rechtecke, folglich die Fläche der durch diese gebildeten ganzen Figur an. Es ist aber klar, daß die Linie ah zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen befahren wurde; die daraus hervorgegangenen Bewegungen des Zeigers Z heben sich folglich auf, und man kann somit die Befahrung der Linie ah weglassen. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Um die Fläche der durch zwei aneinander gelegte Rechtecke gebildeten Figur zu bekommen, deren Seiten mit den Verschiebungen des Planimeters parallel sind, braucht man nur die Umfangslinie der durch dieselben gebildeten Figur zu umfahren.

Dasselbe findet statt, wie viele Rechtecke man auch aneinander legt. Da man nun jede Figur in Rechtecke so zerlegen kann, daß

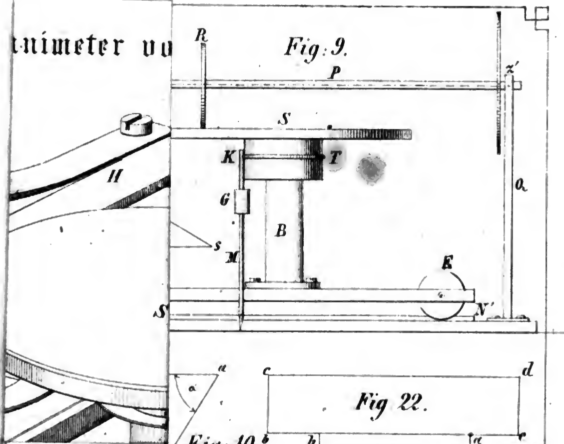
deren Flächensumme der gegebenen Figur gleich ist, und da die Lage der Rechtecke willkührlich ist, so kann man dieselben wie in Figur 23 so einlegen, daß ihre Seiten den Bewegungsrichtungen der Schlitten des Planimeters beziehlich parallel sind. Zufolge des vorhergehenden Satzes braucht man, um die Fläche der ganzen Figur zu ermitteln, nur die treppenförmige Umfangslinie $a b c d \dots a$, welche die Rechtecke begrenzt, zu umfahren. Da aber die Breite der Rechtecke beliebig ist, und demnach auch ausserordentlich klein genommen werden kann, so wird bei dieser Annahme die Treppenlinie mit der eigentlichen Umfangslinie der gegebenen Figur zusammenfallen, und daher deren Inhalt gefunden werden, wenn man ihren Umfang umfährt.

Eine andere Bemerkung bezieht sich auf die durch den Planimeter mögliche Beseitigung der Uebelstände, welche bei geometrischen Plänen aus der Veränderlichkeit des Papiers entspringen, und es ist dieselbe um so wichtiger, als in ihr die Beobachtung angeführt wird, daß das auf die Meßtischblätter gespannte Papier schon v o r seinem Abschneiden sich theilweise verzieht, woraus folgt, daß in solchen Fällen die Lithographien, welche nach den Originalaufnahmen angefertigt werden, Fehler enthalten müssen, auf die vielleicht noch nirgends geachtet wurde. Da mir Herr Hofrath Hansen seine Bemerkungen zu beliebigem Gebrauche übergab, so erlaube ich mir, folgende Stelle aus denselben wörtlich anzuführen:

„Ich habe bei der hiesigen Landesvermessung eingeführt, daß die Geometer das zu den Karten auf die Reißbretter aufgespannte Papier vor dem Beginn des Auftragens der Zeichnung mit einem Quadratnetz von schwachen blauen Linien, deren jede Seite in unserem verjüngten Maßstabe 20 Ruthen (beiläufig 40 Millimeter) beträgt, überziehen müssen, und habe nach eigener Angabe ein Instrument anfertigen lassen, wodurch die Eintheilung dieser Quadrate leicht und genau ausgeführt werden kann. Ausser anderen Vortheilen, die ich hier nicht erwähnen will, dienen diese Quadrate, um für immer die Flächengehalte mit Sicherheit durch das Planimeter bestimmen zu können, da sie auf der ganzen Oberfläche der Karte Normalflächen bilden, deren Flächengehalt

bekannt ist. Durch diese Quadrate haben wir in Erfahrung gebracht, daß das Papier sich in seinen einzelnen Theilen zuweilen verzieht, ehe es vom Reißbrette abgeschnitten wird. Wenn aber bei der Ermittelung der Flächen eine solche Verziehung befürchtet werden muß, so hat der Geometer eine angemessene Anzahl der betreffenden Quadrate zu umfahren, — unsere Planimeter umfassen ein wenig mehr wie acht dieser Quadrate, — und aus der Vergleichung der Fläche, die er erhält, mit der, die er erhalten müßte, den Reduktionsfaktor zu berechnen, den er an den zu messenden Flächen anbringen muß. Da dieser Reduktionsfaktor immer ein sehr kleiner Bruch ist, so ist die Mühe, welche das Berechnen und Anbringen desselben verursacht, durchaus für Nichts zu achten; und dieser Faktor gewährt den großen Vortheil, unter allen Umständen das absolute Maß richtig zu erhalten. Wir sind unter anderem durch Anwendung dieser Quadrate und dieses Reduktionsfaktors in den Stand gesetzt, auch die Flächengehalte nach dem Abschneiden der Karten von den Reißbrettern revidiren zu können. Ueberhaupt zeigt die Erfahrung, daß bei fortgesetzter Anwendung des Planimeters der Reduktionsfaktor nicht entbehrt werden kann; aber weit entfernt, dieses für einen Nachtheil zu halten, muß ich im Gegentheil erklären, daß die Möglichkeit, durch die geringe Mühe, welche die Ermittelung und Anbringung jenes Faktors verursacht, sich stets des absoluten Maßes versichern zu können, eine der schönsten Eigenschaften des Planimeters ist."





nimeter vo
Fig: 9.
R
P
z'
S
K
T
G
B
s
M
E
S
N'
a
Fig 22.
c
d
b
h
a
Fig. 10

[illegible]

Anzeige.

Die in der vorstehenden Abhandlung beschriebenen Hansen'schen Planimeter werden von dem Unterzeichneten für jede beliebige Maßeinheit um folgende Preise angefertigt:

1) Ein Planimeter ganz aus Metall und so groß wie der auf S. 14 u. ff. beschriebene . . . . 75 Thlr.

2) „ „ von derselben Construction, aber für größere Figuren geeignet . . . . 85 Thlr.

3) „ „ so groß wie Nr. 1, aber das Fußgestelle und der obere Schlitten von Holz . . . . 70 Thlr.

4) „ „ wie Nr. 3 construirt, aber für größere Figuren eingerichtet . . . . 80 Thlr.

Hermann Ausfeld in Gotha.

Druck der Dr. C. Wolf'schen Buchdruckerei.



